

**BTT 2 / Kevät 2013****Tentti ke 26.2.2014 klo 15:00 – 19:00**Aalto-yliopisto

Kokeessa saa käyttää laskinta. Laskujen välivaiheet on kirjoitettava käsin näkyviin. Taulukkokirjoja ei sallita; kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta. Kukaan tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

Tehtävä 1: Esitä lineaarikuvauksen $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2)$ matriisi standardikannassa ja vektorien $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, -2)$ määräämässä kannassa.

Tehtävä 2: Laske matriisin $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit. Piirrä kuva, jossa matriisi on tulkittu lineaarikuvaukseksi ja josta ominaisarvojen ja -vektorien geometrinen merkitys käy ilmi.

Tehtävä 3:

- Olkoon $z_1 = 4 - 3i$ ja $z_2 = 3 - 5i$. Määritä $z_1 z_2$, $\text{Im}(z_1/z_2)$ ja $\text{Arg } z_2$. (3p)
- Laske luvun 8 kompleksiset kuutiojuuret ja piirrä ne xy -koodinaatistoon. (3p)

Tehtävä 4: Laske $\int x \cos(5x) dx$ ja $\int_0^\pi x^2 \sin(x) dx$.

Tehtävä 5: Laske vektorikentän $F(x, y) = (xy, 2x - y)$ polkuintegraali origosta pisteeseen $(1, 1)$ pitkin paraabelia $y = x^2$.

Tehtävä 6: Laske tilavuus avaruuden \mathbb{R}^3 alueelle, jota rajoittavat tasot

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - y\}$$

ja sylinteri $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

Kaavoja:

- Muuttujanvaihto tasointegraalissa:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_U f(G(u, v)) J_G(u, v) \, du dv.$$

- Napakoordinaateissa $(x, y) = G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ pätee $J_G(r, \theta) = r$.
 - Sylinterikoordinaateissa $(x, y, z) = G(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ pätee $J_G(r, \theta, z) = r$.
 - Pallokoordinaateissa $(x, y, z) = G(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$ pätee $J_G(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \varphi$.
-