Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.452 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Tentamen 15.11.2004

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

Till tentamens-arkivet
Hälsn. Georg

1. a) Visa att talserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{15}}{11^k}$ konvergerar.
   b) Visa att talserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{15^k}{k^{11}}$ divergerar.

2. Låt $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ vara en konstant vektor och $\vec{r}$ positionsvektorfältet $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + zk$.
   Förenkla följande uttryck:
   a)$\nabla(\vec{u} \bullet \vec{r})$, b)$\nabla(\vec{r} \bullet \vec{r})$, c)$(\vec{r} \bullet \nabla)\vec{r}$, d)$\nabla \bullet (\vec{u} \times \vec{r})$, e)$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{r})$, f)$(\vec{u} \times \nabla) \times \vec{r}$.

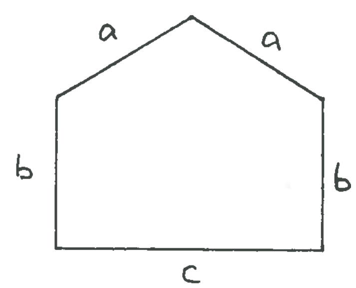
3. Beräkna dubbelintegralen $I = \int_0^1 (\int_x^{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1-y^4}\, dy)dx$ genom att byta integrationsordning. (Svar:$I \approx 0.226$)

4. a)Vid en variabelsubstitution $\vec{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\vec{\imath} + y(u,v,w)\vec{\jmath} + z(u,v,w)\vec{k}$ i en trippelintegral ersätts volymselementet $dV = dxdydz$ som bekant med $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$, där $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ är transformationens Jacobian och kan ses som en förstoringsfaktor.
   Visa att vid övergång till sfäriska koordinater ρ,ϕ och θ via

   $$x(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\cos\theta, y(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\sin\theta, z(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\phi$$

   blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \rho^2\sin\phi$. (Därför ersätts $dV = dxdydz$ inte med $d\rho d\phi d\theta$ utan med $\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$ vid övergång till sfäriska koordinater.)
   b)Använd sfäriska koordinater till att beräkna $\iiint_W xyz^2dxdydz$,
   där $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x,y \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ är en fjärdedel av enhetsklotet.

5. Svakar tänker installera ett vindsfönster. Fönstret skall ha formen av en likbent triangel ovanpå en rektangel, som i figuren till höger. Eftersom Svakar har en tätningslist av längd L, får fönstrets omkrets inte överskrida L. Hur skall fönstret dimensioneras (hur stora skall a, b och c vara i förhållande till L), för att dess area skall maximeras? Hur stor blir fönstrets area då?
   (Som bekant har kvadraten den största arean av alla rektanglar med en given omkrets och den liksidiga triangeln den största arean av alla trianglar med en given omkrets. Dessa resultat får användas utan bevis.)



Imorgon är det en gregoriansk tisdag!
Då kan denna tentamen diskuteras kl. 13:00-13:30 i TF:s bibliotek vid gamla mötesrumsbordet.