TH , Matematiska institutionen

Gripenberg, Fagerholm, Metsalo

Mat-1.453 Grundkurs i matematik 3

Mellanförhör III 14.12.2004

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En funktionsräknedosa är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$. Lös differentialekavtionen $Y'(t) = AY(t)$ då $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.

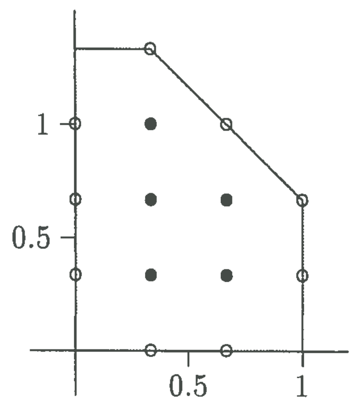
(a) Skriv differentialekvationen $y''(t) + 2y'(t)(y(t) + 1) + y(t)^2 = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ som ett system $Y'(t) = F(t, Y(t))$, $Y(0) = Y_0$.

(b) Vad kan man säga om följande numeriska metod för att bestämma approximationer $Y_n \approx Y(nh)$ av lösningen till ekvationen $Y'(t) = F(t, Y(t))$, $Y(0) = Y_0$:

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(t_n, Y_n), \\ K_2 &= hF(t_n + \tfrac{1}{2}h, Y_n + \tfrac{1}{2}K_1), \\ K_3 &= hF(t_n + h, Y_n + K_2), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \tfrac{1}{4}(K_1 + 3K_2 + K_3), \end{aligned}$$

(c) Om man löser ekvationen i punkt (a) numeriskt så får man som approximation $\begin{bmatrix} 0.990148 \\ -0.970541 \end{bmatrix}$ om man räknar ett steg med Runge-Kuttas metod (av fjärde ordningen) med steglängden 0.01 och man får $\begin{bmatrix} 0.995037 \\ -0.985136 \end{bmatrix}$ om man räknar ett steg med samma metod med steglängden 0.005. Kan man med stöd av dessa resultat säga om $h = 0.005$ är tillräckligt kort om man vill att felet till sitt absolutbelopp skall vara högst 10^{-3}?

3. Skriv ner de ekvationer som en differensapproximation med $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{3}$ ger för problemet $-\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} = f$ i mängden $\Omega = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{4}{3}, x + y \le \frac{5}{3} \}$ då $f(x, y) = 27(x + y)$ och $u(x, y) = 3\max\{x + y - 1, 0\}$ på randen $\partial\Omega$ av Ω, dvs. då $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \frac{4}{3}$ eller $x + y = \frac{5}{3}$. Se figuren!



VÄND!

4. Lös vågekvationen

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), & \\ u_x(0,t) = 0, & \\ u(x,0) = \dfrac{x}{1+x}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & \end{cases}$$

genom att definiera $u(x,0)$ och $u_t(x,0)$ på lämpligt sätt (udda eller jämnt?) för $x < 0$ så att om man löser ekvationen för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$ så får man en lösning som uppfyller randvillkoret $u_x(0,t) = 0$ då $t > 0$. Beräkna $u(1,2)$.