



MS-A0002, Kevät 2014

Tentti / välikoe, 13.3.2014 klo 16-19

Aalto-yliopisto

**Tentti:** tee tehtävät 2, 3, 5 ja 6.

**Välikoe 1:** tee tehtävät 1-3.

**Välikoe 2:** tee tehtävät 4-6.

Välikokeiden suoritusmahdollisuus vain asiasta etukäteen sopineille.

**Merkitse vastauspaperiin** selvästi, mitä koetta (välikoe 1, välikoe 2 vai tentti) suoritat.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

**Tehtävä 1:** a) Osoita, että vektoreille  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  pätee  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ . (3p.)

b) Laske vektorien  $\mathbf{u} = (1, 3, -2)^T$  ja  $\mathbf{v} = (-2, 0, 4)^T$  virittämän suunnikkaan pinta-ala. (3p.)

**Tehtävä 2:** Etsi tasojen  $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1$ ,  $2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 5$  ja  $-x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5$  kaikki leikkauspisteet avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  Gaussin eliminaation avulla. Mitä saamasi vastaus kertoo tasojen sijainnista avaruudessa? (6p.)

**Tehtävä 3:** Etsi matriisi sille lineaarikuvaukselle, joka muuttaa  $xy$ -tason yksikköneliön (kulmat  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  ja  $(0, 1)$ ) suunnikkaaksi, jonka kulmat ovat  $(0, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(-3, 1)$  ja  $(-1, 1)$  siten, että kuviodien kärkipisteet vastaavat toisiaan annetussa järjestyksessä. Esitä matriisi yksinkertaisempia lineaarikuvauksia esittävien matriisien tulona.

**Tehtävä 4:** Ovatko seuraavat yhtälöt totta vai tarua? Jos totta, perustele, jos tarua, anna vastaesimerkki.  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat  $n \times n$ -matriiseja ja  $I$  on  $n \times n$ -identiteettimatriisi.

- a)  $\det(I + A) = 1 + \det(A)$
- b)  $\det(ABC) = \det(A) \det(B) \det(C)$
- c)  $\det(4A) = 4 \det(A)$
- d)  $\det(AB - BA) = 0$

**Tehtävä 5:** Laske diagonalisoinnin avulla  $A^{2014}$ , kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Tehtävä 6:** Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tiedetään, että matriisin  $A^T A$  ortonormaalit ominaisvektorit ovat  $(0, -1)^T$  ja  $(-1, 0)^T$  ja matriisin  $AA^T$  ortonormaalit ominaisvektorit ovat  $(-2/3, -2/3, 1/3)^T$ ,  $(-2/3, 1/3, -2/3)^T$  ja  $(-1/3, 2/3, 2/3)^T$ .

- a) Laske matriisin  $A$  singulaariarvot.
- a) Mikä on matriisin  $A$  singulaariarvohajotelma? Tarkista vastauksesi kertolaskulla!
- b) Kirjoita matriisille  $A$  singulaariarvohajotelman avulla rangia 1 oleva approksimaatio.