MS-A0003 Matriisilaskenta (Aalto-yliopisto)
Turunen / Saari

Välikoe 2 (10.12.2013 klo 17–20)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.
Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

Merkinnöistä. Eri lähteissä matriisin $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ Hermite-konjugaattia eli konjugaattitranspoosia merkitään eri tavoin: esimerkiksi

$$A^* = A^{\mathrm{H}} = \overline{A^{\mathrm{T}}} \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Matriisi $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ on unitaarinen, jos $U^* = U^{-1}$.

1. Olkoon $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s & t \end{bmatrix}$, missä reaaliluvut s, t ovat erisuuret.

   a) Laske $P \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} P^{-1}$.

   b) Diagonalisoi matriisi $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Etsi unitaarinen matriisi $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ siten, että $D := U^*AU \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ on diagonaalinen, missä
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
   Tarkista, että $A = UDU^*$.

3. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ singulaariarvohajoitelma (SVD).
   Toisin sanoen etsi matriisit $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, joille $A = U\Sigma V^*$, missä U, V ovat ortogonaalisia (unitaarisia) ja Σ on singulaariarvojen diagonaalimatriisi.

MS-A0003 Matrix algebra (Aalto University)
Turunen / Saari

Second mid-term exam (10.12.2013, 5pm–8pm)

Please fill in the required information onto each answer sheet.

Calculators and mathematical tables are not allowed.

About grading: Every exam problem will be graded from 0 to 6 points. Harmless small errors do not prevent from getting maximal points. You will get points if your answer contains at least some information (relevant definitions, pictures, calculations etc) — empty answer is surely worth zero.

On notation. In different sources, the Hermitian conjugate (or conjugate transpose) of a matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ is denoted in various ways: for example

$$A^* = A^{\mathrm{H}} = \overline{A^{\mathrm{T}}} \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Matrix $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ is unitary, if $U^* = U^{-1}$.

1. Let $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s & t \end{bmatrix}$, where real numbers s, t are not equal.

   a) Find $P \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} P^{-1}$.

   b) Diagonalize matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Find unitary matrix $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ such that $D := U^*AU \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ is diagonal, where
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
   Check that $A = UDU^*$.

3. Find singular value decomposition (SVD) for matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   In other words, find matrices $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ for which $A = U\Sigma V^*$, where U, V are orthogonal (unitary) and
   Σ is the diagonal matrix of singular values.