

Tentti (21.5.2014 klo 16–19)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0..6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

Merkinnöistä. Eri lähteissä matriisin $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ Hermite-konjugaattia eli konjugaattitranspoosia merkitään eri tavoin: esimerkiksi

$$A^* = A^H = \overline{A^T} \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

Matriisi $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ on unitaarinen, jos $U^* = U^{-1}$.

- a) Sievennä kompleksiluku $\frac{4-2i}{3+i}$ muotoon $x+yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Etsi ne kompleksiluvut $z = a+ib \in \mathbb{C}$, joille $\text{Im}(z + 1/z) = 0$, missä $\text{Im}(w)$ on kompleksiluvun w imaginaariosa.
- Määritä pienimmät positiiviset kokonaisluvut w, x, y, z etanolin palamisen reaktiokaavassa



Kirjoita yhtälöt matriisimuodossa ja ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä.

- Etsi ortogonaalinen (unitaarinen) matriisi $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ siten, että $D := U^*AU \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ on diagonaalinen, missä

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Tarkista, että $A = UDU^* = UDU^T$.

- a) Näytä laskemalla, että matriisi $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ei riipu luvuista $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, kun

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & a \\ u_2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & c \\ v_2 & d \end{bmatrix}^*.$$

- b) Laske singulaariarvohajotelma (SVD) a-kohdan matriisille A , kun $\sigma = 2$, $(u_1, u_2) = (3, 4)$ ja $(v_1, v_2) = (5, 12)$.