

MS-A0003 Matriisilaskenta (Aalto-yliopisto)  
Turunen

**Tentti (1.9.2014 klo 13–16)**

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

**Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.**

Arvostelusta: Tarkastaja pisteittää jokaisen tehtävän asteikolla 0..6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

**Merkinnöistä.** Eri lähteissä matriisin  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  Hermite-konjugaattia eli konjugaattitranspoosia merkitään eri tavoin: esimerkiksi

$$A^* = A^H = \overline{A^T} \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

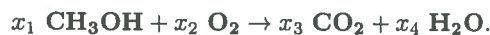
Matriisi  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  on unitaarinen, jos  $U^* = U^{-1}$ .

1. Olkoot  $x = (x_1, x_2)$  ja  $y = (y_1, y_2)$  tason  $\mathbb{R}^2$  vektoreita.
  - a) Määrittele *pistetulo* (eli *skalaaritulo*)  $x \cdot y$  ja *normi*  $\|x\|$ .
  - b) Näytä laskemalla, että

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

**(Huomautus:** Tehtävän ratkaisussa ei saa käyttää cos-funktiota. Tässä voi olla helpointa laskea  $\|x\|^2 \|y\|^2 - |x \cdot y|^2 \geq \dots \geq 0$ .)

2. Määritä pienimmät positiiviset kokonaisluvut  $x_1, x_2, x_3, x_4$  metanolin palamisen reaktiokaavassa



Ratkaise ongelma matriisimuodossa Gaussin eliminointimenetelmällä.

3. Etsi unitaarinen matriisi  $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  siten, että  $D := U^* A U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  on diagonaalinen, missä

$$A := \begin{bmatrix} +3 & -4 \\ +4 & +3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Tarkista, että  $A = U D U^*$ .

4. Laske matriisin  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  singulaariarvoajoitelma eli matriisit  $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , joille  $A = U \Sigma V^T$ , missä  $U, V$  ortogonaalisia (unitaarisia) ja  $\Sigma$  singulaariarvojen diagonaalimatriisi.