

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Jarmo Malinen
MS-A0105 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Pekka Alestalo

Tentti ja välikoeuunnat 12.11.2014 klo 16.30–19.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsakotiedot kaikkiin vastauspapereihin. Kirjoita etusivulle, minkä alla olevista vaihtoehdoista valitset.

Välikoe 1: Tehtävät 1, 2, 3, 4.
Välikoe 2: Tehtävät 5, 6, 7, 8.
Tentti: Tehtävät 2, 3, 5, 7, 8.

1. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x)}{\sin(x^2)}.$$

2. Olkoon $r \neq 0$. Muodosta funktion $f(x) = (1+x)^r$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.

Lisätieto: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi, kun $x_0 = 0$.

3. Yksinkertaistetun mallin mukaan sokeripalan liukeneminen veteen tapahtuu differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti, kun $y = y(t)$ on jäljellä olevan sokeripalan massa hetkellä t ja $k > 0$ on veden lämpötilasta riippuva vakio. Hetkellä $t = 0$ kahvikuppiin pudotetaan 5 gramman sokeripala, joka on 30 sekunnin kuluttua pienentynyt 3 grammaan. Määritä vakion k tarkka arvo. Oletetaan, ettei kahvin lämpötila ehdi tässä ajassa muuttua.

4. Laske integraalit

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} \text{ ja } \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x}) dx.$$

5. Laske integraali

$$\int_0^1 x \sin(\pi x) dx.$$

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - 3y = 6$ alkuehdolla $y(0) = 4$.

Vihje: Yhtälön voi ratkaista joko separoituvana tai lineaarisena.

7. Ratkaise differentiaaliyhtälöön $y'' + 7y' - 8y = 0$ liittyvä alkuarvo-tehtävä $y(0) = 0$, $y'(0) = 27$.

8. Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{5^k}$$

suppenee? Tutki erikseen myös ne kohdat $x = \pm R$, joissa sarja muuttuu suppenevasta hajaantuvaksi (ts. $R =$ potenssisarjan suppenemissäde).

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$