Aalto-yliopisto

MS-A0004/A0006, Syksy 2014

Tentti, 12.11.2014 klo 16.30-19.30

Tentti: tee tehtävät 1–4.
Välikoe 2: tee tehtävät 3–5. (Huom: Asiasta on täytynyt sopia etukäteen luennoitsijan kanssa.)

Merkitse vastauspaperiin selvästi, mitä **koetta** (tentti vai välikoe 2) ja kumpaa **kurssia** (MS-A0004 vai MS-A0006) suoritat.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Tarkastellaan yhtälöä $z^4 = -1$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Osoita, että $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ toteuttaa yhtälön. *(2 p.)*

b) Etsi loput ratkaisut. *(4 p.)*

Mahdollisesti hyödyllisiä trigonometristen funktioiden arvoja:

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0	0	1	0
$\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	–

Tehtävä 2: Etsi Gaussin eliminaation avulla tasojen $x_1+2x_2+3x_3=2$, $2x_1+4x_2+9x_3=5$ ja $-x_1-2x_2+3x_3=0$ kaikki leikkauspisteet avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Mitä saamasi vastaus kertoo tasojen sijainnista avaruudessa? *(6p.)*

Tehtävä 3: Diagonalisoi matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tarkista vastauksesi matriisikertolaskulla. *(6p.)*
Vihje: Yksi B:n ominaisarvoista on nolla.

Tehtävä 4: Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tiedetään, että matriisin A^TA ortonormaalit ominaisvektorit ovat $(0,1)^T$ ja $(1,0)^T$ ja matriisin AA^T ortonormaalit ominaisvektorit ovat $(2/3,2/3,1/3)^T$, $(-2/3,1/3,2/3)^T$ ja $(1/3,-2/3,2/3)^T$.

a) Määritä matriisin A singulaariarvot. *(2p.)*

a) Mikä on matriisin A singulaariarvohajotelma? Tarkista vastauksesi matriisikertolaskulla. *(2p.)*

b) Kirjoita matriisille A singulaariarvohajotelman avulla "rangia 1" oleva approksimaatio, jossa huomioit vain merkityksellisimmän singulaariarvon. *(2p.)*

Tehtävä 5: a) Etsi determinantin avulla ne vakiot $c \in \mathbb{R}$, joilla matriisi

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & c \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

on kääntyvä. *(4p.)*

b) Jos edellisen kohdan matriisissa $c = 0$, mitä determinantti kertoo lineaarikuvauksesta $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$? *(2p.)*