Till TF:s
tentamens-
arkiv.
Hälsn.
Georg

Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

MS-A0009 Matrisräkning

Sluttentamen, 21.5.2014

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

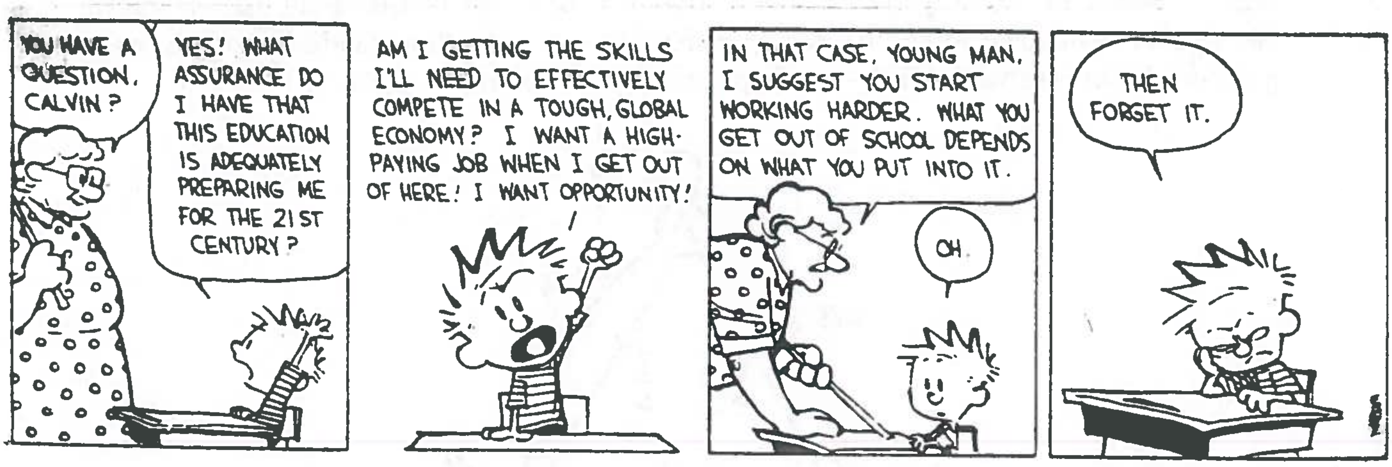
Vid denna deltentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!
Observera, att olika uppgifter kan ge olika antal poäng.

1. Låt A vara 2×3-matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.
   a) Ge någon konkret 3×2-matris B sådan att $AB = I_2$ (2×2-identitetsmatrisen). (2p.)
   b) Visa att det inte finns någon 3×2-matris C sådan att $CA = I_3$ (3×3-identitetsmatrisen). (2p.)

2. I ett höghus kan varje våning byggas så att där finns
   a) 3 trerummare, 7 tvårummare och 8 enrummare,
   b) 4 trerummare, 4 tvårummare och 8 enrummare eller
   c) 5 trerummare, 3 tvårummare och 9 enrummare.
   Är det möjligt att bygga ett höghus med 66 trerummare, 74 tvårummare och 136 enrummare? Om det är möjligt, finns det då flera alternativ och hur många våningar har höghuset? Förklara de införda storheterna och hur ekvationssystemet satts upp. (6p.)

3. Visa att om U är en $m \times n$-matris och V en $n \times m$-matris sådana att $m \times m$-matrisen $I_m - UV$ är inverterbar, så är även $n \times n$-matrisen $I_n - VU$ inverterbar och $(I_n - VU)^{-1} = I_n + V(I_m - UV)^{-1}U$. (6p.)

Fortsättning på nästa sida. Var god vänd.



4. Hankeiten Pelle har bestämt sig för att börja motionera. Han tänker dagligen ägna sig åt aerobics (A), basket (B) eller cykling (C). För att motionerandet inte skall bli alltför inrutat, kastar han tärning varje morgon för att bestämma, vilken typ av motion han skall ägna sig åt den dagen.
i) Om han ägnat sig åt aerobics föregående dag, betyder 1 aerobics igen, 2 eller 3 basket och 4, 5 eller 6 cykling denna dag.
ii) Om han ägnat sig åt basket föregående dag, betyder 1 eller 2 aerobics, 3 eller 4 basket igen och 5 eller 6 cykling denna dag.
iii) Om han ägnat sig åt cykling föregående dag, betyder 1 aerobics, 2, 3, 4 eller 5 basket och 6 cykling igen denna dag.
Då han berättade om sina planer för sin gode vän teknologen Svakar, förklarade denne, att det rör sig om en *Markov-process*, som kan åskådliggöras mha. diagrammet nedan.
Om a_k är sannolikheten att Pelle ägnar sig åt aerobics, b_k sannolikheten att han ägnar sig åt basket och c_k sannolikheten att han ägnar sig åt cykling dag k, gäller det att $0 \leq a_k, b_k, c_k \leq a_k + b_k + c_k = 1$. Vidare fås sannolikhetsvektorn $X_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}]^T$ för dag $k+1$ ur sannolikhetsvektorn $X_k = [a_k, b_k, c_k]^T$ för dag k via multiplikation med en *Markov-matris* enligt

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/6 & 1/6 \\ 2/6 & 2/6 & 4/6 \\ 3/6 & 2/6 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = M \cdot X_k,$$

där alla elementen i Markov-matrisen M ligger strängt mellan 0 och 1 och där summan av elementen i varje kolumn är $= 1$. Varje sådan matris har $\lambda_1 = 1$ som ett egenvärde och för alla andra egenvärden gäller att $|\lambda| < 1$. Detta medför i sin tur att i långa loppet kommer sannolikhetsvektorn att närma sig egenvektorn, som hör till egenvärdet 1, normaliserad så att summan av elementen i egenvektorn är $= 1$.
a) Bestäm en egenvektor till matrisen M, som hör till egenvärdet 1. Normalisera därefter egenvektorn, så att summan av dess komponenter är $= 1$ och ange, hur många procent av dagarna Pelle i långa loppet kommer att ägna åt aerobics, basket resp. cykling, om han står fast vid sin motionsplan. (4p.)
b) Beräkna M:s övriga 2 egenvärden samt deras absolutbelopp för att visa, att bägge absolutbeloppen är < 1. (4p.)
(Tips: I stället för att bestämma nollställena hos $p_M(\lambda) = det(M - \lambda \cdot I)$, kan man lika gärna bestämma nollställena hos $216 \cdot p_M(\lambda) = 6^3 \cdot det(M - \lambda \cdot I) = det(6(M - \lambda \cdot I)) = det(6M - 6\lambda \cdot I) = \{\mu = 6\lambda\} = det(6M - \mu \cdot I)$, så blir det trevligare räkningar utan bråktal. Sedan kan vi utnyttja att $\lambda = 1$ (dvs. $\mu = 6$) är ett nollställe till $p_M(\lambda)$, som ju har samma nollställen som $216 \cdot p_M(\lambda) = det(6M - \mu \cdot I)$ och använda lång division av polynom för att skriva $det(6M - \mu \cdot I)$ på formen $(\mu - 6)(\alpha\mu^2 + \beta\mu + \gamma)$.)