Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

MS-A0009 Matrisräkning

Sluttentamen, 1.9.14

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Planen $\Pi_1 : x + 3y - 2z = 0$ och $\Pi_2 : 4x - 2y + z = 0$ är inte parallella, så de skär längs en linje L_1 i xyz-rummet. Planen $\Pi_3 : 5x + y - z = 0$ och $\Pi_4 : x - y + z = 6$ är inte heller parallella, så de skär längs en (annan) linje L_2. Undersök om L_1 och L_2 skär i någon punkt $P : (x, y, z)$ eller inte. Om de skär, bestäm även skärningspunkten.

2. a) Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Visa att i så fall är även A:s transponatmatris A^T inverterbar och att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Förklara vilka egenskaper hos matriser som används i beviset samt var de används.
   b) Låt A och B vara inverterbara $n \times n$-matriser. Visa att i så fall är även produkten AB inverterbar och att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Förklara åter.

3. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Beräkna egenvärdena hos den symmetriska matrisen B^TB och bestäm en egenvektor, som hör till egenvärdet med det största absolutbeloppet. (Per definition betraktas inte nollvektorn som en egenvektor.)

4. En matris A sådan att $A^2 = A$ kallas för en *idempotent* matris.
   a) Förklara varför endast kvadratiska matriser kan vara idempotenta.
   b) Visa att determinanten hos en idempotent matris är 0 eller 1.
   c) Visa att en idempotent matris endast kan ha egenvärdena 0 och 1.
   d) Om $\hat{n}$ är en enhetsvektor i $\mathbf{R}^3$ och $\bar{s}$ är en vektor i $\mathbf{R}^3$ sådan att $\hat{n}$ och $\bar{s}$ inte är ortogonala, så är $P = I - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}}\bar{s}\hat{n}^T$ en parallellprojektionsmatris. Visa att P är idempotent.
   e) Visa att parallellprojektionsmatrisen P har determinanten $\det(P) = 0$.
   f) Determinanten hos en kvadratisk matris är produkten av egenvärdena, så parallellprojektionsmatrisen P har 0 som ett egenvärde. Visa att P också har 1 som ett egenvärde.

5. Bestäm de minsta positiva heltalen w, x, y och z i reaktionsschemat för förbränning av etanol
$$w\mathbf{C_2H_5OH} + x\mathbf{O_2} \to y\mathbf{CO_2} + z\mathbf{H_2O}.$$
   Skriv ekvationerna på matrisform och lös mha. Gauss' elimination. Enbart svaret med verifiering ger ett tröstpoäng.
   (Reaktionen kan studeras empiriskt under lördagens inledande sits på TF. Då kan även denna tentamen diskuteras under något därtill lämpat bord.)