Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Metsalo

MS-A0009 Matrisräkning

Sluttentamen, 2014-11-12

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.
Observera, att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng.

1. För komplexa tal $z = x + iy, w = u + iv$ (där $x, y, u, v \in \mathbf{R}$) definieras summan $z + w$ som $z + w = (x + u) + i(y + v)$, produkten $z \cdot w$ som $z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$ och komplexkonjugatet $\overline{z}$ av z som $\overline{z} = x - iy$.
   a) Visa att $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ och att $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. (1p.+2p.)
   b) Visa att $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$ för $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. (3p.)

2. Om $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_p], \vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_p] \in \mathbf{R}^p$, så ges deras skalärprodukt $\vec{u} \bullet \vec{v}$ av $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_p \cdot v_p$. Beräknandet av skalärprodukten kräver alltså p stycken multiplikationer av datorn (och $p - 1$ additioner, men dessa utför datorn vida snabbare). Låt A vara en 100×300-matris, B en 300×500-matris och C en 500×700-matris. ABC är då en 100×700-matris, som kan beräknas antingen som $(AB)C$ eller som $A(BC)$. Bestäm antalet multiplikationer, som datorn måste utföra, då ABC beräknas som $(AB)C$ respektive som $A(BC)$. (3p.+3p.)

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   a) Bestäm LU-faktoriseringen av A. (3p.)
   b) Lös det linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$, antingen med hjälp av den uträknade LU-faktoriseringen eller direkt (varvid samma arbete utförs en gång till!). (3p.)

4. Ett n:te-gradspolynom har högst n olika nollställen och om n är udda och polynomets koefficienter är reella, har polynomet minst ett reellt nollställe. Karaktäristiska polynomet hos en reell $n \times n$-matris har reella koefficienter och gradtalet n.
   a) Bestäm egenvärdena hos $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. (3p.)
   b) Bestäm någon egenvektor till B, som hör till ett reellt egenvärde. (Per definition är nollvektorn inte en egenvektor.) (3p.)