

MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

1. välikoe 20.11.2013 klo 17–19.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä paitsi sydämentahdistimia. Eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. a) Lukujono (a_n) toteuttaa palautuskaavan $a_{n+1} = 5a_n + 20$. Määritä sellainen vakio $c \in \mathbf{R}$, että kaavalla $b_n = a_n + c$ määritelty jono (b_n) toteuttaa palautuskaavan $b_{n+1} = 5b_n$.
- b) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n).$$

Vihje: Lavenna sopivalla lausekkeella.

2. a) Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{6^n}?$$

- b) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{6^n} x^n$$

suppenee ja millä arvoilla se ei suppene?

3. a) Määritä funktion $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ derivaatta $f'(x)$.
- b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

jossa f' on laskettu tehtävän ensimmäisessä osassa.

4. Näin joulun lähestyessä muistellaan usein entisaikojen idyllistä elämänmuotoa, jolloin nurkistaan jäätyneen matalan multapenkkatalon homehuneille lattialankuille oli tapana levitellä olkia lasten iloksi & talikynttilöiden aiheuttaman tulipalovaaran maksimoimiseksi.

Tuberkuloosin ja isorokon riuduttamalla kansanosalla ei ollut varaa edes neljän desimaalin logaritmitauluihin, joita porvarisperheiden penskat koronkiskontaleikeissään jo kilvan käyttivät. Entisaikojen sankareita kunnioittaaksesi laske likiarvo $b \approx \sin \sqrt{10}$ käyttämällä Taylorin 1. asteen polynomia seuraavan reseptin mukaisesti:

- a) Anna 1. asteen Taylorin polynomi $P(x)$ funktiolle $f(x) = \sin \sqrt{x}$ kehityskeskisteessä $a = \pi^2$ (joka perustuu ikaikaiseen havaintoon, että $\pi^2 \approx 10$).
- b) Laske tämän avulla numeerinen arvo $b = P(10)$.

Vihje: Likiarvojen määrittämiseksi ilman laskinta riittää tietää $\pi = 3.1415926 \dots$ ja $1/\pi = 0.31830989 \dots$, jotka laskettiin jo viime jouluna.