Aaltouniversitetet
Björn Ivarsson, 050-4067 832

Mellanförhör 2, torsdag 12.12.2013 kl 0900 - 1200
Differential- och integralkalkyl 1, MS-A0109.
Hjälpmedel: Skrivdon.

Motivera dina lösningar! Att endast lämna svar ger inga poäng. **Notera att det finns uppgifter på baksidan också!**

(1) Beräkna

(a)
$$\int_0^1 \arctan x \, dx.$$
(3p)

(b)
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\, d\theta.$$
(3p)

(2) Konvergerar integralerna nedan? I så fall beräkna dess värde.

(a)
$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx.$$
(3p)

(b)
$$\int_0^1 \frac{x-5}{x^2+2x-3}\, dx.$$
(3p)

(3) Lös problemet
$$\begin{cases} y''(x)+3y'(x)-10y(x)=7e^{2x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3. \end{cases}$$
(6p)

(4) Lös differentialekvationerna.

(a)
$$xy'(x)+(\ln x)y(x)=\ln x$$
(3p)

(b)

$$\begin{cases} y'(x)y(x) = -x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(3p)

(5) Låt

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)^n \, d\phi$$

då $x > 1$ och $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Lägg märke till vilken variabel som är integrationsvariabel!* Dessa funktioner av x kallas för *Legendrepolynom* av grad n. Man ser lätt att $P_0(x) = 1$. Visa att man alltid får ett polynom av rätt grad genom att lösa uppgifterna nedan.

(a) Beräkna $P_1(x)$ och visa därmed att det är ett polynom av grad 1. (1p)

(b) Visa att $P_2(x)$ är ett polynom av grad 2. (2p)

(c) Visa att $P_n(x)$ är ett polynom av grad n. *(Ledning: Använd binomialsatsen samt symmetriegenskaper för* $\cos^k\phi$, $k = 1, \ldots, n$, *i integrationsintervallet.)* (3p)

Lycka till!