Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Karrila

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

1. välikoe 29.1.2014 klo 17–19.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Kun 1-säteinen kolikko vierii liukumatta 2-säteisen kolikon ympäri, niin pienemmän kolikon reunaan merkitty piste piirtää tasokäyrän (= *nefroidi*, kuva kääntöpuolella), jolla on parametrisointi

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos(3t) \\ y = 3\sin t - \sin(3t), \end{cases}$$

kun $t \in [0, 2\pi]$. Laske käyrän kaarenpituus välillä $t \in [0, \pi]$.
Vihje: Integroinnissa auttaa $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ja

$$\cos t \cos(3t) + \sin t \sin(3t) = \cos(3t - t) = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t.$$

2. Ympyräkartion pohjan säde on r ja korkeus h, jolloin sen tilavuus on $V(r, h) = \pi r^2 h/3$.
a) Laske funktion V kaikki 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatat.
b) Arvioi differentiaalin avulla tilavuuden virhettä $|\Delta V|$, kun $r = 1 \pm 0{,}2$ ja $h = 2 \pm 0{,}1$.
Huom: Sovitaan, että b-kohdassa (ilman laskinta) $\pi \approx 3$.

3. a) Yhtälö $2\sin x + \sin y = x + 2y$ määrittelee yksikäsitteisen implisiittifunktion $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (kuva kääntöpuolella). Määritä yhtälön $y'(x) = 0$ pienin ratkaisu x_0 alueessa $x > 0$. Arvoa $y_0 = y(x_0)$ ei tarvitse laskea.
b) Tarkastellaan elliptistä paraboloidia $z = x^2 + 2y^2$. Osoita, että ne paraboloidin pisteet, joissa pinnan kaltevuuskulma on $\pi/3$, ovat xy-tason ellipsin $4x^2 + 16y^2 = 3$ yläpuolella.

4. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^3$ avoin joukko ja $f\colon D \to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Tarkastellaan pisteitä $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$, joiden yhdysjana $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sisältyy kokonaan joukkoon D. Osoita, että on olemassa piste $\mathbf{c} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, jolle

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Vihje: Yhden muuttujan väliarvolause sopivalle funktiolle $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$.

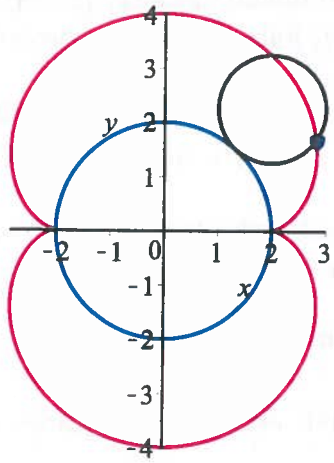
Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \pi/3 & \pi/2 & 3\pi/4 & \pi & 5\pi/4 & 3\pi/2 & 7\pi/4 & 2\pi \\ \sin(\alpha) & 0 & \sqrt{3}/2 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ \cos(\alpha) & 1 & 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Käännä!

Tehtävä 1

```
> with(plots) :
> A := plot([3·cos(t) − cos(3·t), 3·sin(t) − sin(3· t), t=0..2·Pi], color=red, scaling
      =constrained) :
> B := implicitplot(x^2 + y^2 = 4, x=-2..2, y=-2..2, color=blue) :
> C := implicitplot((x − 2)^2 + (y − 2.25)^2 = 1, x=0..3, y=0..4, color=black) :
> E := pointplot([2.8, 1.65], symbol=circle, thickness=10) :
> display({A, B, C, E})
```



Tehtävä 3 a)

```
> implicitplot(2·sin(x) + sin(y) = x + 2·y, x=-10..10, y=-10..10, numpoints=5000, scaling
      =constrained)
```