

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Tentti ja välikoeuusinnat 13.3.2014

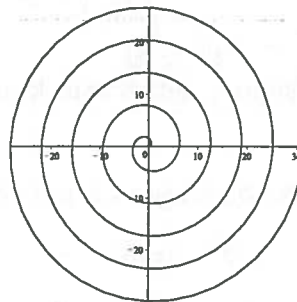
Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin. **Kirjoita etusivulle, minkä alla olevista vaihtoehdoista valitset.**

Välikoe 1: Tehtävät 1, 2, 3, 4. (korvaa 1. vk pisteet, jos parempi)

Välikoe 2: Tehtävät 5, 6, 7, 8. (korvaa 2. vk pisteet, jos parempi)

Tentti: Tehtävät 1, 2, 4, 6, 7. Harjoituspisteet eivät voimassa tentissä.

1. Tarkastellaan spiraalia $x = t \cos(t)$, $y = t \sin(t)$, kun $t \geq 0$.
 - a) Määritä parametrin arvoa $t = \pi/2$ vastaava käyrän tangenttivektori.
 - b) Laske spiraalin ensimmäisen kierroksen kaarenpituus.



2. a) Määritä implisiittisen tasokäyrän $x^2 + y^2 = 2/y$ pisteeseen $(1, 1)$ asetetun tangentin kulmakerroin.
b) Määritä ellipsoidin $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ pisteeseen $(1, 1, 1)$ asetetun tangenttiatason yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$.
3. Olkoon $f(x, y) = xy^3 - x^2y$ ja $\mathbf{a} = (1, 1)$.
 - a) Määritä jokin konkreettinen yläraja virheelle $|\Delta f| = |f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})|$, kun $|\mathbf{h}| \leq 0,1$.
 - b) Missä \mathbf{h} -suunnassa virheen vahvistumiskerroin (= häiriöalttius)

$$\frac{|\Delta f|}{|\mathbf{h}|}$$

on suurin mahdollinen, ja kuinka suuri?

Vihje: Tehtävässä voi käyttää differentiaalia, vaikka se antaakin vain funktion muutoksen lineaarisen osan.

4. Funktio $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja $f_x(1, 1) = 2$, $f_y(1, 1) = 3$ sekä $f_{xx}(1, 1) = f_{xy}(1, 1) = f_{yy}(1, 1) = 0$. Määritellään napakoordinaattien avulla uusi funktio $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Laske osittaisderivaatat F_r , F_θ ja $F_{r\theta}$ pisteessä $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4)$.

Käännä!

5. Osoita, että funktiolla $f(x, y) = x^3 - y^3 - 6xy + 8$
 a) ei ole ääriarvoa origossa $(0, 0)$.
 b) on paikallinen ääriarvo pisteessä $(-2, 2)$. Onko kyseessä paikallinen maksimi vai minimi?

6. Olkoot $x, y, z > 0$ ja $xyz = 1$. Osoita, että

$$x + y + z \geq 3.$$

Vihje: Tutki lausekkeen $x + y + z$ ääriarvoja ehdolla $xyz = 1$.

7. Kolmion K kärkipisteet ovat $(0, 2)$, $(1, 0)$ ja $(0, -1)$. Laske tasointegraali

$$\iint_K 10x^2y \, dA.$$

8. a) Laske tasointegraali

$$\iint_D \frac{dA}{1 + x^2 + y^2},$$

kun $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.

- b) Suppeneeko a-kohdan integraali, kun $D = \mathbf{R}^2$?

Lisätieto 1: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

α	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin(\alpha)$	0	$\sqrt{3}/2$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	1/2	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1

Lisätieto 2: Eräitä integraalifunktioita:

$$\int \sqrt{1+t^2} \, dt = \frac{1}{2} t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + C$$

$$\int \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{1}{2} t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin(t) + C$$