

Tentti 4.9.2014

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

- a) Määritä pinnan  $x^4 + 3x^2y + 2y^2 + z = 15$  normaalivektori pisteessä  $(1, 2, 0)$ .  
b) Määritä funktiolle  $f(x, y, z) = x + xy^2 + xy^2z^3$  kaksi erilaista (valitse itse!) 2. kertaluvun osittaisderivaattaa pisteessä  $(1, 2, 3)$ .

- Oletetaan kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio  $f(x, y)$  jatkuvasti derivoituvaksi. Napakoordinaattimuunnoksen  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  jälkeen funktio saa muodon  $f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(r, \theta)$ . Osoita, että

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

- Määritä funktion  $f(x, y, z) = 8x - 4y + 2z$  suurin ja pienin arvo pallopinnalla  $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ .
- Piirrä kuvio tasojoukosta  $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\}$ . Laske sen pinta-ala  $A$  ja integraali

$$\iint_D y \, dA.$$

- Olkoon  $D$  tason yksikkökierros

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Laske tasointegraali

$$\frac{1}{\pi} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA.$$

Tarpeeton lisätieto: Kyseessä on yksikkökierrokosta satunnaisesti valitun pisteen origosta mitatun etäisyyden odotusarvo.