

MS-A0203 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2
Kevät 2014**Välikokeiden uusinta ja tentti****13.03.2014** Välikoe 1: 1 – 3; Välikoe 2: 4 – 7; Molemmat välikokeet: 1 – 7;

Tentti: 1, 2, 3, 4, 5, 7.

1. Laske spiraalinpätjän

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cos t, \\ y(t) = e^{-t} \sin t, \end{cases}$$

kaarenpituus, jossa parametri $t \in [0, \tau]$. Mitä tapahtuu kun $\tau \rightarrow \infty$?

2. Laske raja-arvo

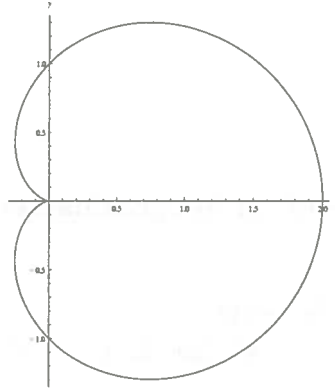
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{3x^2(y-1)^2}{2x^4 + 2(y-1)^4}$$

mikäli se on olemassa, tai perustele miksi raja-arvoa annetussa pisteessä ei ole olemassa.

3. Tarkastellaan yhtälön $x^2 - y^2 = 1$ määräämää hyperbolia ja yhtälön $x^2 + y^2 = 1$ määräämää ympyrää. Määritä käyrien leikkauspisteet. Ympyrän ja käyrän leikkauspistettä sanotaan oskulointipisteeksi, mikäli niillä on tässä pisteessä yhteinen tangentti. Osoita, että annettujen ympyrän ja hyperbelin kaikki leikkauspisteet ovat oskulointipisteitä.
4. Laske funktion $f(x, y) = \sin x \cos y$ tasointegraali yli kolmion T, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ ja $(\pi, \pi/2)$.

(Vihje: Riippuen integrointijärjestyksestä joko $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ tai $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ on hyödyllinen.)**KÄÄNNÄ!**

5. Laske napakoordinaatistossa annetun kardioidin $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pinta-ala.



Kuva 1: Kardioidi.

(Vihje: $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$.)

6. Anna funktion $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $(x, y) = (2, 0)$. Käytä tätä hyväksi laskeaksesi funktion likiarvo pisteessä $(2.2, -0.2)$.

7. Ensimmäisen luokan kabaree- ja dragravintola *Moulin Rougen* Cancan-esitysten viihdyttävyyden ekonometrisen mallinnuksen (J. Vartiainen, 2013) perusteella havaittu olennaisesti riippuvan vain puuterin ja huiskujen määrästä. Toimitusjohtaja Mme. de Pompadourin ainoana toiveena on maksimoida myllynsä tuotto, joka on suoraan verrannollinen Cancan-esitysten viihdyttävyyteen.

Olkoon *Moulin Rougen* yhdessä illassa kuluttama puuterin ja huiskujen määrät x_1 (yksikkö kg) ja x_2 (kappalemäärä), jossa puuteri maksaa 3 e/kg ja huiskut 6 e/kpl. Mme. de Pompadourin käyttökate antaa kuitenkin mahdollisuuden vain 300e sijoitukseen kutakin kabareeiltta kohden.

Ikävä kyllä, Mme. de Pompadour oli valitettavan tarkkaamaton juuri sillä luennolla, joilla Lagrangen kertojien menetelmä on esitetty. Auta häntä optimoimalla Lagrangen kertojien menetelmällä Cancan-esityksen tuotto

$$S = 30x_1 - 2x_1^2 + 25x_2 - 0.5x_2^2$$

$$\text{rajoitusehdolla } 3x_1 + 6x_2 = 300$$

Anna vastaukseksi huiskujen ja puuterin optimimäärät sekä saavutettu maksimituotto.

KÄÄNNÄ!