

MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Tentti 13.03.2014 klo 16:00-19:00.

Vain kirjoitusvälineet sallittu — ei laskimia, ei taulukoita.

1. Olkoon  $f(x, y) = x^2 + xy + y + y^2$ .

- (a) Mihin suuntaan  $f$ :n arvo kasvaa nopeimmin origossa? Entä mihin suuntaan  $f$ :n arvo pienenee nopeimmin origossa?
- (b) Määritä funktion  $f$  tasa-arvokäyrälle normaali- ja tangenttivektori origossa.
- (c) Määritä funktion  $f$  kuvaajalle normaali- ja tangenttivektori origossa.

2. Olkoon  $f(x, y, z) = \frac{\sin x}{y} + e^{-z}$ .

- (a) Missä pisteissä  $f$  on differentioituva?
- (b) Muodosta lineaarinen approksimaatio  $f$ :lle pisteessä  $(0, 1, 0)$  ja approksimoi sen avulla  $f$ :n arvoa pisteessä  $(0.01, 1.02, -0.01)$ .

3. Laske funktion  $f(x, y, z) = x$  ääriarvot ehdolla  $z = x + y$  ja  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$ . Tehtävän ratkeavuutta ei tarvitse tarkastella, vaan voit olettaa ratkaisun olevan olemassa. (Huomaa että annetun ehdon molempien yhtälöiden on oltava voimassa *yhtä aikaa*.)

4. (a) Osoita että muuttujanvaihdon

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

muuntosuhde on  $\rho^2 \sin \phi$ . Huom.  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

(b) Laske  $\iiint_D z^2 dV$  kun  $D$  on joukkojen  $z \geq 0$  ja  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  leikkaus.

