Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Till TF:s tentamens-arkiv. Hälsn. Georg

Metsalo

MS-A0209 Differential- och integralkalkyl 2

Sluttentamen, 4.9.2014

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Vi studerar ytan $xyz = 2$ i 1:a oktanten $x, y, z > 0$. Tangentplanet till ytan i en godtycklig punkt begränsar en tetraeder tillsammans med koordinatplanen. Visa att volymen hos denna tetraeder är oberoende av i vilken punkt på ytan vi tar tangentplanet samt beräkna denna volym.

2. $f(x, y, z) = x \cdot e^{y+z^2} \Rightarrow f(2, -4, 2) = 2$. Approximera $f(2.05, -3.92, 1.97)$ mha. linjär approximering.

3. Låt $f(x, y)$ och dess 1:a ordningens partiella derivator vara kontinuerliga i $\mathbf{R}^2$. Inför polära koordinater r och θ via $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Då är $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r, \theta)$. Visa att $(\partial F/\partial r)^2 + (\frac{1}{r} \cdot \partial F/\partial\theta)^2 = (\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2$.

4. Beräkna $\int_0^8 (\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{16 - x^4}dx)dy$.
(Gott råd: Byte av integrationsordning.)

5. Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ och den räta cirkulära konen $x^2 + y^2 = z^2$ begränsar en glasstrutsformad kropp W i övre halvrummet $z \geq 0$. I figuren till höger syns ett tvärsnitt av kroppen genom symmetriaxeln (z-axeln).
a) Beräkna kroppens volym $V = \iiint_W dV$.
(Kontroll: $V < \frac{1}{6} \cdot \frac{4\pi}{3}R^3$, eftersom sex glasstrutar ryms i sfären $x^2+y^2+z^2 = R^2$ och det blir lite utrymme över.)
b) På grund av symmetri finns kroppens tyngdpunkt på z-axeln.
Beräkna tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_W z \cdot dV$.
(Gott råd: Pga. kroppens form kan cylindriska eller sfäriska koordinater vara lämpliga.)