



Aalto-yliopisto

MS-A0305 / Syksy 2013

Välikoe 1, 20.11.2013 klo 17-19

Kokeessa saa käyttää laskimia, mutta ei taulukkirjoja.

Tehtävä 1: Laske puolipallon

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

massa, kun sen tiheysfunktio on $\delta(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1$.

Tehtävä 2: Tarkastellaan vektorikenttää $F(x, y) = 4xi + yj$.

- Onko kyseinen vektorikenttä konservatiivinen?
- Millaisia ovat sen kenttäviivat ja tasa-arvokäyrät? Laske ja hahmottele kuva.

Tehtävä 3: Mikä on vektorikentän

$$F(x, y, z) = zi - yj + 2xk$$

tekemä työ siirryttäessä

- käyrää $r(t) = t^3i + t^2j + 2tk$ pitkin origosta pisteeseen $(1, 1, 2)$?
- ensin yhtä suoraa pitkin origosta pisteeseen $(0, 0, 2)$ ja sitten toista suoraa pitkin tästä pisteestä pisteeseen $(1, 1, 2)$?

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

$$\frac{dr}{F_r(r, \phi)} = \frac{rd\phi}{F_\phi(r, \phi)},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

$$\int_c f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt.$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{d\mathbf{r}}{du}(u, v) \times \frac{d\mathbf{r}}{dv}(u, v)$$

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{n}(u, v)| \, du \, dv$$

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi m$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$(r, \varphi, z): x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi), z = z, dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$(\rho, \varphi, \theta): x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta), y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), z = \rho \cos(\varphi), dV = \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$