MS-A0305

Tentti, 8.1.2014 klo 16-19

Aalto-yliopisto

Kokeessa saa käyttää laskimia, mutta ei taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Laske integraali

$$\iiint_D \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV,$$

missä $D \subset \mathbb{R}^3$ on origokeskisen pallon, jonka säde on 2, ulkopuoli.

Tehtävä 2: Olkoon $f(x,y,z) = x\sin(y) + z^3\cos(y)$ funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ja $\mathbf{F}(x,y,z) = y\sin(x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - y^2\ln(z)\mathbf{k}$ vektorikenttä $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Mitä kuvaavat gradientti, divergenssi ja roottori? Anna näistä esimerkit funktion f ja vektorikentän $\mathbf{F}$ avulla. (4p)

b) Olkoon vektorikenttä $\mathbf{G}$ määritelty funktion f avulla: $\mathbf{G}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$. Mikä on tämän vektorikentän tekemä työ kuljettaessa origosta pisteeseen $(1,\pi,1)$ suoraa pitkin? (2p)

Tehtävä 3: Laske vektorikentän $\mathbf{F} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vuo ylöspäin läpi pinnan $z = 4-x^2-y^2$ sen osan, joka jää pinnan $z = 3$ yläpuolelle.

Tehtävä 4: Osoita Stokesin lauseen avulla, että

$$\oint_C (y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r} = \sqrt{3}\pi a^2,$$

kun C on pintojen $x^2+y^2+z^2 = a^2$ ja $x+y+z = 0$ leikkauskäyrä sopivasti suunnistettuna.

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

$$\frac{dr}{F_r(r,\phi)} = \frac{r d\phi}{F_\phi(r,\phi)},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

$$\int_c f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt.$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\, dt$$

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{d\mathbf{r}}{du}(u,v) \times \frac{d\mathbf{r}}{dv}(u,v)$$

$$\iint_S f\ dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|\ du\ dv$$

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\ dS$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(r,φ,z): $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$, $dV = r\ dr\ d\varphi\ dz$
(ρ,φ,θ): $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, $dV = \rho^2\sin(\varphi)\ d\rho\, d\varphi\, d\theta$