Aalto-yliopisto

MS-A0305 / Syksy 2013
Välikoe 2, 12.12.2013 klo 9-12

Kokeessa saa käyttää laskimia, mutta ei taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + z)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

vuo ulos yksikkökuutiosta $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1]\}$

a) Gaussin lauseen avulla (2 p.)

b) Suoraan vuointegraalin määritelmästä (4 p.).

Tehtävä 2: Olkoon C pintojen $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ja $z = 3$ leikkauskäyrä suunnistettuna ylhäältä päin katsottuna vastapäivään. Olkoon

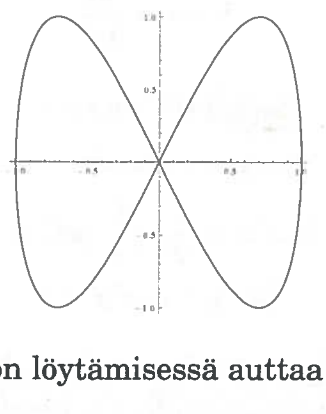
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + y^2 + \sin(x^2))\mathbf{i} + (2xy + xz)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}.$$

Laske $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (6 p.)

Tehtävä 3: Olkoon tasokäyrän C parametrisaatio $\mathbf{r} = \sin(t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$ (kuva alla). Tutki, miten käyrän rajaama pinta suunnistuu. Laske sitten Greenin lauseen avulla viivaintegraali

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

missä $\mathbf{F}$ on vektorikenttä $\mathbf{F}(x, y) = ye^{x^2}\mathbf{i} + x^3e^y\mathbf{j}$. (6 p.)



Vihje: Saamasi integraalin arvon löytämisessä auttaa integroitavan funktion parillisuuden tarkastelu.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

$$\frac{dr}{F_r(r,\phi)} = \frac{r d\phi}{F_\phi(r,\phi)},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

$$\int_c f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|\ dt.$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\ dt$$

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{d\mathbf{r}}{du}(u,v) \times \frac{d\mathbf{r}}{dv}(u,v)$$

$$\iint_S f\ dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|\ du\ dv$$

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\ dS$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi m$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(r,φ,z): $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$, $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$
(ρ,φ,θ): $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, $dV = \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$