Aalto-yliopisto

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-C1300 Kompleksianalyysi
Kevät 2014

Välikokeiden uusinta ja tentti **13.03.2014**

Välikoe 1: 1 – 3; Välikoe 2: 4 – 7; Tentti: 1, 3, 4, 6, 7. Kokeessa saa käyttää laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. a) Laske $|(1+i)(2+i)|$.

   b) Määritä argumentin päähaaran arvo $\operatorname{Arg} z$ pisteessä
   $$z = (1+i)^{12}.$$

   c) Osoita, että vektorit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ovat kohtisuorassa jos ja vain jos $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.

2. Tutki, ovatko seuraavat funktiot analyyttisiä jossain alueessa $D \subset \mathbb{C}$. Myönteisessä tapauksessa määritä alue D.

   (a)
   $$f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z,$$

   (b)
   $$f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y), \qquad z = x + iy.$$

   (c)
   $$f(z) = 1/(1 - z^4).$$

3. Laske kompleksinen polkuintegraali
   $$\oint_C \operatorname{Re} z \, dz,$$
   kun C on kolmio kärkipisteinä $0, 1, 1+i$, vastapäivään kierrettynä.

4. Laske residymenetelmää käyttäen integraali
   $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{15 \sin^2 \theta + 1}.$$

5. Laske residymenetelmää käyttäen (reaalinen) integraali
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

Käännä

6. Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 4y(n) = 1, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 0.$$

7. Todista *Schwarzin lemma*:

   Jos $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ on analyyttinen funktio ja $f(0) = 0$, niin $|f(z)| \leq |z|$. Tässä $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, eli yksikkökiekko.

   Vihje. Voit käyttää maksimimoduliperiaatetta. Tutki funktiota

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & \text{kun } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$