

MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

1. välikoe 18.11.2013

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

1. Määrittele seuraavat käsitteet.

- (a) Lineaarikuvaus
- (b) Normi
- (c) Ortonormaali kanta

2. Osoita, että

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$$

on avaruuden \mathbb{P}_2 (=enintään astetta 2 olevien reaalipolynomien joukko) ortonormaali kanta, kun sisätulon avaruuteen \mathbb{P}_2 määrittelee kaava

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

3. Lineaarikuvauksesta $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiedetään, että

$$A(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

$$A(0, 1, 0) = (4, 2, 1)$$

$$A(0, 0, 1) = (8, 4, 1).$$

Etsi kannat A :n kuva-avaruudelle ja nolla-avaruudelle. Ovatko A :n matriisiesityksen sarakkeet lineaarisesti riippumattomat?

4. Olkoon reaalikertoiminen vektoriavaruus V , joka on varustettu sisätulolla $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Joukon $S \subset V$ ortogonaalikomplementti määritellään

$$S^\perp = \{ \mathbf{w} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \mathbf{v} \in S \}.$$

- (a) Osoita, että S^\perp on V :n vektorialiavaruus.
- (b) Oletetaan, että $\dim(V) < \infty$. Osoita, että $(S^\perp)^\perp = \text{sp}(S)$, missä $\text{sp}(S)$ on kaikkien S :n alkioista muodostettujen lineaarikombinaatioiden joukko.