

MS-C1420 Fourier-analyysi  
Tentti ja välikokeiden uusinta 12.3.2014

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!  
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.  
Tentin tehtävät ovat 5 tehtävää tehtävistä 2, 3, 4, 5, 6, 8.  
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat

1. vk: 1–4
2. vk: 5–8

1. Funktion  $s$  Fourier-muunnos on  $\hat{s}(\nu) = e^{-\nu^4}$ . Määritä funktioiden  $g(t) = s(4t)$  ja  $h(t) = s(t+4)$  Fourier-muunnokset.

2. Funktiosta  $s$  tiedetään, että sen Fourier-muunnos on

$$\hat{s}(\nu) = \begin{cases} 2, & 1 \leq \nu \leq 3, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritä  $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt$  ja  $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt$ .

3. Diskreetti jono  $s$  on jaksollinen jaksolla 10 ja sen diskreetti Fourier-muunnos  $\hat{s}$  toteuttaa ehdot  $\hat{s}(j) = \hat{s}(10-j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 9$ . Onko jono  $s$  reaalinen? Perustele ja muista että kompleksiluku  $z$  on reaalinen jos ja vain jos  $\bar{z} = z$ .

4. Funktio  $s$  on jatkuvasti derivoituva, jaksollinen jaksolla 1 ja sen Fourier-kertoimet ovat  $\hat{s}(0) = 0$  ja  $\hat{s}(k) = \frac{i(-1)^k}{k^3}$  kun  $k \neq 0$ . Määritä  $s$ :n derivaatan  $s'$  Fourier-kertoimet.

5. Osoita, että jos  $\int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt < \infty$  ja  $h(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(t-j)$  kun  $t \in \mathbb{R}$  niin jaksollisen funktion  $h$  Fourier-kerroin  $\hat{h}(k)$  on jaksottoman funktion  $g$  Fourier-muunnoksen arvo pisteessä  $k$ .

6. Signaalista  $s(t) = \sin(2\pi 7t)$  otetaan näytteitä  $q(j) = s(j \cdot 0.6)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 3999$  ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin  $j$ ,  $0 \leq j \leq 3999$ , arvoilla luvut  $|\hat{q}(j)|$  ovat suurimmillaan?

7. Oletetaan, että  $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty$  ja  $\int_{\mathbb{R}} |w(t)| dt^2 = 1$  ja että  $s$ :n ikkunoitu Fourier-muunnos ikkunafunktiolla  $w$  on  $F(s, w)(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} s(t) \overline{w(t-\tau)} dt$ . Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(s, w)(\tau, \nu)|^2 d\nu d\tau = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

8. Oletetaan, että  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on sellainen, että  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a(j)| < \infty$ . Määritellään vaimennettu distribuutio  $h = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a(j) \delta_j$  jolloin siis sen arvo testifunktiolla  $\psi$  on  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a(j) \psi(j)$ . Määritä  $h$ :n Fourier-muunnos.