Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Korvenpää

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

2. välikoe 17.2.2014 klo 9–12.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Olkoon $f_n\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ nx, & 0 \le x \le 1/n, \\ 1, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$.
a) Määritä funktiojonon (f_n) pisteittäinen rajafunktio $f\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [-1,1].$$

b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti kohti funktiota f, kun metriikka saadaan normista

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| \mid -1 \le x \le 1\}?$$

2. Oletetaan, että funktio $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ on tasaisesti jatkuva: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x, y \in X \text{ ja } d(x,y) < \delta.$$

Osoita: Jos (x_n) on Cauchy-jono X:ssä, niin $(f(x_n))$ on Cauchy-jono Y:ssä.

3. Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) kompakteja metrisiä avaruuksia. Osoita, että tuloavaruus $X \times Y$ on kompakti, kun sen metriikkana on

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2), \quad x_1, x_2 \in X, \ y_1, y_2 \in Y.$$

Huom: Metriikan valinta ei ole tehtävän olennainen kohta.

4. a) Esitä kaksi erilaista tapaa ilmaista se, että metrinen avaruus X on epäyhtenäinen. (Toinen saa olla määritelmäkin.)
b) Olkoon X yhtenäinen metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ epätyhjiä osajoukkoja. Osoita, että on olemassa piste $x_0 \in X$, joka on yhtä kaukana joukoista A ja B, ts. $d(x_0, A) = d(x_0, B)$.
Vihje: Oletetaan tunnetuksi, että funktio $f\colon X \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$, on jatkuva. Tässä $d(x,A)$ = pisteen x pienin (= inf) etäisyys joukosta A.