Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu — Huusko/Kelomäki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)
Kurssitentti ja yleinen tentti 8.12.2020 klo 9.00-12.00
Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+7}.$$

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$

c) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{e^x}.$$

Ratkaisu. a) Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n+1/n^2}{3+7/n^2} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

b) **Tapa 1.** L'Hospitalin säännön nojalla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = \frac{-\cos(0)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

L'Hospitalin sääntöä voi käyttää, koska raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2}$$

on olemassa ja raja-arvot

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x}$$

ovat muotoa "$\frac{0}{0}$".

Tapa 2. Kosinin Taylorin sarjan perusteella

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$

kun $x \approx 0$. Siis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\frac{x^2}{2})-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

c) Raja-arvo voidaan laskea sijoittamalla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{e^x} = \frac{\cos(0)}{e^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Koska raja-arvo ei ole muotoa "$\frac{0}{0}$", niin L'Hospitalin sääntöä ei voida käyttää. Taylorin sarjoihin perustuvia arvioita voi halutessaan käyttää.

2. a) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+1}?$$

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^3+\sqrt{k}}?$$

c) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k} x^k$$

suppenee?

Ratkaisu. a) Koska

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{3k+1} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

niin sarja hajaantuu.

b) **Tapa 1.** Koska

$$0 \leq \frac{k+1}{2k^3+\sqrt{k}} \leq \frac{k+k}{2k^3+0} = \frac{1}{k^2}$$

ja sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee (potenssi $2 > 1$), niin tarkasteltava sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Tapa 2. Koska

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{2k^3+\sqrt{k}}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \in]0, \infty[$$

ja sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee (potenssi $2 > 1$), niin tarkasteltava sarja suppenee sarjojen vertailuperiaatteen nojalla.

c) Kyseessä on potenssisarja, jonka kehityskeskus on $x_0 = 0$. Sarja on

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{missä} \quad a_k = \frac{k}{5^k}.$$

Määritetään sarjan suppenemissäde R, saadaan

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \frac{5^{k+1}}{5^k} = 5.$$

Siis sarja suppenee joukossa $]x_0 - R, x_0 + R[=]-5, 5[$ ja hajaantuu joukossa $]-\infty, -5[\cup]5, \infty[$. Tutkitaan vielä suppenemisvälin päätepisteet ± 5. Kun $x = 5$, sarja on

$$\sum_{k=1}^{\infty} k,$$

mikä hajaantuu, koska yleisen termin raja-arvo ei ole nolla. Sama päättely tapahtuu, jos $x = -5$. Siis sarja suppenee täsmälleen arvoilla $x \in]-5, 5[$.

3. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx.$$

a) Määritä likiarvo korvaamalla sinifunktio $\sin(t)$ sen kolmannen asteen Maclaurin-polynomilla ja sijoittamalla siihen uusi muuttuja. Huom: Maclaurin = Taylor tapauksessa $x_0 = 0$.

b) Laske integraalin tarkka arvo sopivan sijoituksen avulla.

Ratkaisu. a) Sinin kolmannen asteen Maclaurin-polynomi on

$$x - \frac{x^3}{6}, \quad \text{joten} \quad \sin\sqrt{x} \approx \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}^3}{6} = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{6},$$

kun $x \approx 0$. Saadaan

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx \approx \int_0^1 x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{6}\, dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5\cdot 6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{15} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

b) Halutaan eroon neliöjuuresta, joten sijoitetaan $\sqrt{x} = u$. Siis $x = u^2$ ja $dx = 2udu$. Integraalin rajat säilyvät ennallaan. Saadaan

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx = \int_0^1 2u\sin(u)\, du.$$

Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int u\sin(u)\, du = -u\cos(u) - \int 1\cdot(-\cos(u))\, du = -u\cos(u) + \sin(u).$$

Siis integraalin arvo on

$$\int_0^1 2u\sin(u)\, du = 2\left[-u\cos(u) + \sin(u)\right]_{u=0}^{u=1} = 2\sin(u) - 2\cos(u).$$

(Tietokoneen mukaan tämä luku on noin $0,60234$, siis (a)-kohdan likiarvo on melko tarkka.)

4. Tarkastellaan funktiota $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.
a) Määrää funktion f suurin arvo.
b) Määrää funktion f käännepisteet.
c) Laske

$$\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Ratkaisu. Funktio f on kaikkialla derivoituva ja kaikkialla ei-negatiivinen. Lisäksi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = f(0).$$

Siis funktio saa suurimman arvonsa jossakin derivaattansa nollakohdassa. Tulon derivoinnilla saadaan

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = xe^{-x}(2-x).,$$

Siis derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2$. Saadaan $f(2) = 2^2/e^2 \approx 2^2/3^2 = 4/9$. (Tietokoneen mukaan $2^2/e^2 \approx 0,54$.)

Vastaus: Funktion f suurin arvo on $f(2) = 2^2/e^2$.

b) Funktion käännepisteet ovat sen toisen derivaatan nollakohtia, joissa funktion derivaatta vaihtaa merkkiä. Saadaan

$$f''(x) = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0,$$

jos ja vain jos $x = 2 - \sqrt{2} \approx 0,5$ tai $x = 2 + \sqrt{2} \approx 3,5$.

Vastaus: Funktiolla f on käännepisteet $x = 2 - \sqrt{2}$ ja $x = 2 + \sqrt{2}$.

c) Kahdella osittaisintegroinnilla ja yhdellä integroinnilla saadaan

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x},$$

minkä voi tarkistaa derivoimalla. Siis

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_{x=0}^{x=\infty}.$$

Termi e^{-x} vie kaikki ylärajasijoitukset nollaan. Kerroin x vie kaikki alarajasijoitukset nollaan, paitsi viimeisen, joka tuottaa

$$-(-2e^{-0}) = 2.$$

Siis

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = 2.$$

5. Määrää differentiaaliyhtälön

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -2$.

Ratkaisu. Differentiaaliyhtälö voidaan separoida muotoon

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx.$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

eli

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C},$$

missä C on vakio. Käytetään alkuehtoa vakion C arvon selvittämiseksi. Saadaan

$$y(0) = -\frac{1}{0 + C} = -2,$$

joten $C = \frac{1}{2}$. Siis haluttu ratkaisu on

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}.$$

6. Ratkaise lineaarinen yhtälö $xy' - 3y = x^5$, missä $x > 0$.
a) Kirjoita yhtälö ensin normaalimuotoon $y' + p(x)y = q(x)$.
b) Muodosta integroiva tekijä $x \mapsto e^{u(x)}$, missä $u(x) = \int p(x)\,dx$.
c) Kerro normaalimuotoinen yhtälö puolittain integroivalla tekijällä.
d) Integroi yhtälö puolittain muuttujan x suhteen.

Ratkaisu. a) Normaalimuoto on

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4,$$

joten $p(x) = -3/x$ ja $q(x) = x^4$.

b) Saadaan

$$u(x) = \int p(x)\,dx = \int -3/x\,dx = -3\ln|x| = -3\ln(x),$$

koska $x > 0$, joten integroiva tekijä on

$$e^{-3\ln(x)} = e^{\ln(x^{-3})} = \frac{1}{x^3}.$$

c) Saadaan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^3}\right) = \frac{y'}{x^3} - \frac{3}{x^4}y = x.$$

d) Saadaan

$$\frac{y}{x^3} = \frac{x^2}{2} + C,$$

joten

$$y = \frac{x^5}{2} + Cx^3,$$

missä C on vakio.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

$$\text{Sarja } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ suppenee, jos ja vain jos } p > 1.$$

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia III-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**