TENTAMEN,
MATRISRÄKNING,
MS-A0009

- Tid: Onsdag 1.6.2022, 16:30–19:30
- Hjälpmedel: En sida (A4) av studentens egna handskrivna anteckningar, signerade av studenten. Dessa behöver inte lämnas in och bedöms inte.
- Påbörja varje ny uppgift på en ny sida. Varje uppgift ger högst fyra poäng. Hela tentamen ger högst 20 poäng.
- Motivera dina lösningar noggrannt. Svar utan motivering ger inga poäng.
- Lycka till / Ragnar

Uppgift 1

Låt A och B vara inverterbara $n \times n$-matriser. Antag att $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ är en egenvektor till både A och B. För vart och ett av påståendena nedan, ange med motivering om det är nödvändigtvis sant, nödvändigtvis falskt, eller om den givna informationen inte räcker för att bestämma om det är sant eller falskt. (1p/deluppgift)

a) AB är inverterbar.
b) $A + B$ är inverterbar.
c) $\mathbf{v}$ är en egenvektor till AB.
d) $\mathbf{v}$ är en egenvektor till $A + B$.

Lösning 1

a) **Sant:** AB är inverterbar, ty $ABB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB = I_n$, så $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
b) **Kan vara sant eller falskt:** Tex sant om $A = B$, men falskt om $A = -B$.
c) **Sant:** Om egenvärdena är λ och μ så gäller $AB(\mathbf{v}) = A\mu\mathbf{v} = \mu A\mathbf{v} = \mu\lambda\mathbf{v}$.
d) **Sant:** Om egenvärdena är λ och μ så gäller $(A+B)(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}+B\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}+\lambda\mathbf{v} = (\mu + \lambda)\mathbf{v}$.

Uppgift 2

Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$AX + A = B.$$

Lösning 2

A är inverterbar med

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

så vi kan skriva

$$AX + A = B \Leftrightarrow AX = B - A \Leftrightarrow X = A^{-1}(B - A)$$

och beräkna

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Uppgift 3

Finn alla lösningar (reella och komplexa) till ekvationen $z^6 = 64$. Skriv dem på både polär och rektangulär form.

Lösning 3

Med $z = re^{\theta i}$ får vi ekvationen

$$r^6 e^{6\theta i} = z^6 = 64 = 2^6.$$

Vi får alltså $|z| = r = 2$ och $e^{6\theta i} = 1$, så $6\theta = 2\pi n$ för något heltal n. Argumentet uppfyller $0 \le \theta < 2\pi$, så vi får sex lösningar:

$$z = \begin{cases} 2e^{0i} & & = 2 \\ 2e^{\pi i/3} & = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) & = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 2e^{2\pi i/3} & = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) & = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 2e^{\pi i} & & = -2 \\ 2e^{4\pi i/3} & = 2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})) & = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 2e^{5\pi i/3} & = 2(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})) & = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

Uppgift 4

Låt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vad är det minsta värdet av $\left\| L\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$, då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$?

Lösning 4

Avståndet $\left\| L\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$, minimeras då $L\mathbf{x}$ är ortogonalprojektionen av vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ till kolonnrummet av L. Normalekvationen säger då $L^T L\mathbf{x} = L^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, det vill säga

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så $\mathbf{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$. Avståndet blir då

$$\left\| L\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\| = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Uppgift 5

Definiera talföljden a_n genom $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, och

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ då } n \geq 2.$$

Talföljdens första termer är alltså

$$0, 0, 1, 2, 5, 10, 21, \ldots$$

Beteckna $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, för heltal $n \geq 2$.

a) Finn en matris A sådan att $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$ för $n \geq 2$. (1p)
b) Diagonalisera matrisen A i förra deluppgiften. (2p)
c) Finn en sluten formel (utan rekursion) för a_n. (1p)

Lösning 5

a)

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix},$$

så vi får

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Karaktäristiskt polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\lambda^2 - 2 + \lambda = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Egenvärdena är rötterna till det karaktäristiska polynomet, alltså $2, 1, -1$.

Motsvarande egenvektorer: $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ lösning } \mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ lösning } \mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ lösning } \mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen är alltså

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Slutligen beräknar vi inversen i denna faktorisering med Gausselimination, och får

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Vi får

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= A^n \mathbf{v}_2 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{(-1)^n}{6} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

så i synnerhet får vi (sista koordinaten)

$$a_n = \frac{2^n}{3} + \frac{-1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} = \frac{2^{n+1} - 3 + (-1)^n}{6}.$$