PHYS-C0220 Termodynamiikka ja statistinen fysiikka
Tentti 24.2.2023 [5 tehtävää, 2 sivua]
Ylioppilaskirjoituksissa hyväksytty laskin on sallittu, taulukkokirjat ja muut kaavakokoelmat eivät ole sallittuja. Jokainen tehtävä on pisteiltään samanarvoinen. Paperin kääntöpuolelta löydät mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja.
Kirjoita tenttipaperiesi ensimmäisen sivun ylälaitaan selkeästi teetkö tentin kurssin osasuorituksena (**OSATENTTI**) vai suoritatko kurssin pelkästään tenttimällä (**KOKOTENTTI**).
Mikäli teet tentin osasuorituksena, vastaa tehtävissä 2 – 5 ainoastaan kohtaan (a). Mikäli teet kokotentin, vastaa edellä mainituissa tehtävissä myös kohtaan (b).

Tehtävä 1.
Selitä lyhyesti ja ytimekkäästi seuraavat statistisen fysiikan käsitteet. Huom! Pelkkä (mahdollinen) matemaattinen määritelmä ei ole riittävä.
a) Mikrokanoninen ensemble
b) Kvanttikonsentraatio n_Q
c) Kemiallinen potentiaali μ
d) Musta kappale

Tehtävä 2.
a) Selitä mikä on statistisen fysiikan klassinen ekvipartitioteoreema: mitä se tarkalleen ottaen ennustaa ja milloin sen voi katsoa olevan luotettava?
Anna yksi käytännön esimerkki tapauksesta, jossa ekvipartitioteoreema toimii ja antaa fysikaalisesti oikean tuloksen. Anna tämän lisäksi vielä käytännön esimerkki tapauksesta missä ekvipartitioteoreema antaa väärän tuloksen (ja selitä miksi näin tapahtuu).
b) Johda klassiselle 3D-ideaalikaasulle Maxwellin ja Boltzmannin vauhtijakauma. Määritä tästä edelleen suoraan integroimalla hiukkasten keskimääräinen vauhdin neliö $\langle v^2 \rangle$ ja osoita, että tulos on yhtäpitävä klassisen ekvipartitioteoreeman kanssa.

Tehtävä 3.
a) Mitä ovat *termodynaamiset potentiaalit*? Mikä on niiden fysikaalinen perusta ja mihin niitä käytetään? Mikä olisi oikea termodynaaminen potentiaali makroskooppisen systeemin tarkasteluun, kun tarkastellaan i) ilmassa olevien molekyylien adsorptiota metallikappaleen pinnalle vakiolämpötilassa; ii) kahden kokoonpuristumattoman aineen molekyylien sekoittumista vakiolämpötilassa? Perustele vastauksesi huolellisesti.
b) Olkoon tarkastellun systeemin mahdolliset energiatilat diskreetti joukko $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, (N-1)\varepsilon$. Osoita, että systeemin partitiofunktio voidaan kirjoittaa

$$Z = \frac{1 - e^{-N\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}.$$

Määritä edelleen partitiofunktion avulla systeemin sisäenergia U ja lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa, C_V. Hahmottele näiden kuvaajat huomioiden erityisesti hyvin matalan ja hyvin korkean lämpötilan rajat. Mitä samankaltaisuuksia ja toisaalta eroja systeemin sisäenergialla ja lämpökapasiteetilla on kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän vastaavien ominaisuuksien kanssa?

Tehtävä 4.

a) Selitä millä ehdoilla ideaalista kaasua voidaan kuvata klassisena ideaalikaasuna. Esitä näille ehdoille sanallisen selityksesi tueksi selvät matemaattiset muotoilut.

b) Tarkastellaan fotonikaasua säiliössä, jonka tilavuus on V. Oletetaan, että fotonikaasu on termodynaamisessa tasapainossa säiliön seinien kanssa lämpötilassa T. Kaasun tilatiheys on $g(\omega) = V\omega^2/(\pi^2c^3)$. Osoita, että säiliössä olevien fotonien lukumäärän odotusarvo on

$$\langle N\rangle = \alpha\frac{V}{(\beta\hbar c)^3},$$

jossa α on dimensioton kerroin. Osoita lisäksi, että fotonikaasun lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa $C_V \propto T^3$.

Tehtävä 5.

a) Tarkastellaan ideaalista fermionikaasua tilavuudessa V. Kuvaile miten fermionit asettuvat energiatiloille, kun $T = 0$ K sekä tästä seuraavia systeemin termodynaamisia ominaisuuksia U, S ja C_V. Miten tilanne muuttuu, kun lämpötilaa nostetaan: miten ja miksi edellä mainitut termodynaamiset suureet muuttuvat? Anna tässä puhtaasti kvalitatiivinen mutta kattava kuvaus, mitään laskuja ei tarvita.

b) Osoita, että N:stä elektronista koostuvalle ideaaliselle kaasulle, jonka tilatiheys on $g(k) = Vk^2/\pi^2$,

$$U = \frac{3}{5}N\varepsilon_F,$$

jossa ε_F on kaasun fermienergia. Osoita edelleen tämän avulla, että kaasun paine on

$$p = \frac{2}{5}n\varepsilon_F,$$

jossa n on kaasun konsentraatio, $n = N/V$. Mikä on tämän paineen alkuperä?

Seuraavista tiedoista voi olla apua:

- Geometrinen sarja $a\sum_{n=0}^{\infty} r^n = a/(1-r)$, kun $|r| < 1$
- Katkaistu geometrinen sarja $a\sum_{n=0}^{N-1} r^n = a(1-r^N)/(1-r)$, kun $|r| < 1$
- Stirlingin approksimaatio: $\ln N! \approx N\ln N - N$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$
- $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$
- $\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3}$, $x \ll 1$.
- $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
- $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
- $\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$