

Tentissä ei saa olla lisämateriaalia. Laskimen käyttö on sallittu.

1. (6p.) Olkoon $X(t)$ Markovin prosessi, jonka tila-avaruus on $S = \{0, 1, 2\}$ ja tilasiirtymäintensiiviteetit ovat

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Piirrä prosessin tilasiirtymäkaavio. Onko prosessi pelkistymätön? (1p.)
(b) Oletetaan, että prosessi käynnistetään hetkellä $t = 0$ tilasta 0. Kuinka kauan kestää keskimäärin siihen, että prosessi siirtyy pois tilasta 0? Mikä on todennäköisyys, että kahden siirtymän jälkeen prosessi on takaisin tilassa 0? (2p.)
(c) Ratkaise prosessin tasapainojakauma. (3p.)
2. (6p.) Tarkastellaan elastista dataliikennettä vuotasolla dataverkon linkillä, jonka kapasiteetti on 100 Mbit/s. Vuot eli käynnissä olevat tiedostonsiirrot jakavat linkin kapasiteetin reilusti PS-jonokurin (PS = processor sharing) mukaisesti. Mallintamiseen voidaan soveltaa M/M/1-PS jonomallia, jossa uusia voita saapuu Poisson prosessin mukaisesti intensiteetillä 70 vuota/sekunti ja voiden koot ovat eksponentiaalisesti jakautuneita niin että niiden keskiarvo on 1 Mbit.

- (a) Oletetaan, että edellisen vuon saapumisesta systeemiin on kulunut jo 1 sekunti. Kuinka kauan keskimäärin kestää siihen, että seuraava vuo saapuu (muista lyhyt perustelu)? (1p.)
(b) Olkoon $X(t)$ käynnissä olevien voiden lukumäärä systeemissä hetkellä t , joka on Markovin prosessi. Piirrä prosessin tilasiirtymäkaavio. (1p.)
(c) Ratkaise prosessin $X(t)$ tasapainojakauma. Onko tasapainojakauman olemassaololle ehtoa? (2p.)
(d) Mikä on vuon keskimääräinen läpäisy (throughput)? (2p.)
3. (6p.) Entropia. FC Honka (F) ja HJK (H) pelaavat ottelusarjan, joka päättyy kun jompikumpi on voittanut kaksi ottelua. FC Honka voittaa aina ottelun todennäköisyydellä 0.53 ja HJK todennäköisyydellä 0.47. Satunnaismuuttuja X kertoo ratkaisuun asti pelatun ottelusarjan pituuden (joka selvästi on joko 2 tai 3). Muuttuja Y kertoo lopullisen voittajan (F tai H).

- (a) Laske $H(X)$.
(b) Laske $H(Y|X)$.
(c) Laske $I(Y; X)$.
4. (6p.) Lähdekoodaus. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X , joka saa arvot joukosta $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ todennäköisyyksillä $p(X = 1) = 1/9$, $p(X = 2) = 1/3$, $p(X = 3) = 1/9$ ja $p(X = 4) = 4/9$. Luo Huffman-koodauksella välitön koodi kun aakkoston koko on $q = 2$. Tee sama kun aakkoston koko on $q = 3$. Mitkä ovat koodisanojen pituuksien odotusarvo (molemmissa tapauksissa)? Vertaa näitä odotusarvoja entropiaan $H_q(X)$, $q = 2, 3$.