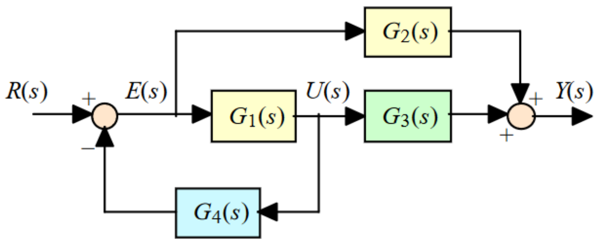
ELEC-C1230 Säätötekniikka

Välikoe 1 23.2.2023

1.

a. Määritä alla olevassa kytkennässä siirtofunktiot Y(s)/R(s) ja Y(s)/E(s). (3p)



$$\begin{cases} Y = G_3U + G_2E \\ U = G_1E \\ E = R - G_4U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = G_1G_3E + G_2E \\ E = R - G_1G_4E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = (G_1G_3 + G_2)E \\ (1 + G_1G_4)E = R \end{cases}$$

Ratkaistaan ensin Y(s)/R(s)

$$\begin{cases} Y = (G_1G_3 + G_2)E \\ (1 + G_1G_4)E = R \end{cases} \Rightarrow Y = (G_1G_3 + G_2)\frac{R}{1 + G_1G_4}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{Y}{R} = \frac{G_1G_3 + G_2}{1 + G_1G_4}}}$$

Vastaavasti voidaan ratkaista E(s)/R(s)

$$\begin{cases} Y = (G_1G_3 + G_2)E \\ (1 + G_1G_4)E = R \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{E}{R} = \frac{1}{1 + G_1G_4}}}$$

b. Negatiivisesti takaisinkytketyn järjestelmän myötähaaran siirtofunktio on $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ ja vastahaaran $H_1(s) = \frac{1}{s+3}$. Määritä suljetun järjestelmän karakteristinen yhtälö ja esitä napa-nolla-kuvio. Mitä voidaan sanoa suljetun järjestelmän stabiilisuudesta ja värähtelyominaisuuksista? (3p)

Lasketaan ensin suljetun systeemin siirtofunktio

$$\begin{cases} E = R - H_1Y \\ Y = G_1E \end{cases} \Rightarrow Y = G_1(R - H_1Y) = G_1R - G_1H_1Y$$

$$\Leftrightarrow Y + G_1H_1Y = G_1R$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{R} = \frac{G_1}{1 + G_1H_1}$$

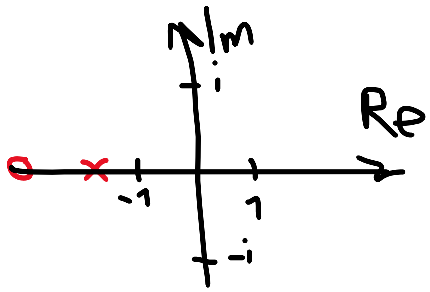
$$G_{tot} = \frac{Y}{R} = \frac{G_1}{1+G_1H_1} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+3}} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)}+\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{(s+1)(s+3)+1}{(s+1)(s+3)}} = \frac{s+3}{(s+1)(s+3)+1} = \frac{s+3}{s^2+3s+s+3+1} = \frac{s+3}{s^2+4s+4}$$

Suljetun systeemin karakteristinen yhtälö on $\underline{\underline{s^2+4s+4=(s+2)^2}}$.

Systeemin navat ovat $\underline{\underline{s_{p1,2} = \text{-}2}}$ ja nolla(t) $\underline{\underline{s_z = \text{-}3}}$.

Napa-nolla-kuviossa navat on merkitty x:llä ja nolla o:lla.

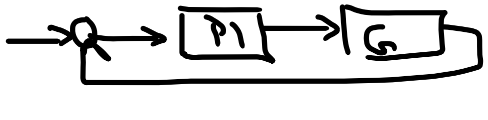


Systeemi on asymptoottisesti stabiili, sillä kaikki navat ovat kompleksitason vasemmassa puolitasossa.

Kaikki navat ovat reaalisia, joten systeemin vaste ei värähtele.

Systeemin ainoa nolla on imaginääriakselin vasemmassa puolitasossa, joten systeemi on minimivaiheinen.

2. Olkoon epästabiilin prosessi $G(s) = \frac{1}{s-1}$. Käytetään negatiivista takaisinkytkentää ja säätäjää $K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$, jossa viritysparametrit Kp ja Ti ovat positiivisia vakioita.



a. Minkä niminen säätäjä on kyseessä? Millä parametrien valinnoilla saadaan P-säätäjä? (2 p)

Kyseessä on PI-säädin. Asettamalla viritysparametri Ts -> ääretön tai vastaavasti Ki = 0 saadaan P-säädin.

$$K_p\frac{1+T_is}{T_is}=\frac{K_p}{T_is}+K_p=K_p+\frac{K_p}{T_i}\frac{1}{s}$$

$$K_i=\frac{K_p}{T_i}$$

b. Onko prosessi stabiloitavissa ja jos on, millä viritysparametrien arvoilla tämä onnistuu? (2p)

Tarkastellaan suljetun systeemin karakteristinen yhtälö

$$G_{PI}=\mathrm{K}_p+K_i\frac{1}{s}=\frac{K_ps+K_i}{s}$$

$$G=\frac{1}{s-1}$$

$$G_{CL}=\frac{\frac{K_ps+K_i}{s}\frac{1}{s-1}}{1+\frac{K_ps+K_i}{s}\frac{1}{s-1}}=\frac{\frac{K_ps+K_i}{s(s-1)}}{\frac{s(s-1)+K_ps+K_i}{s(s-1)}}=\frac{K_ps+K_i}{s(s-1)+K_ps+K_i}=\frac{K_ps+K_i}{s^2-s+K_ps+K_i}$$

$$G_{CL}=\frac{K_ps+K_i}{s^2+s(K_p-1)+K_i}$$

Tarkastellaan stabiilisuuskriteerit Routhin Kaaviolla

$$\begin{array}{cc} 1 & K_i \\ K_p-1 & 0 \\ K_i & \end{array}$$

Stabiili, jos merkin vaihtoa ensimmäisessä sarakkeessa.

$$K_p-1>0\rightarrow K_p>1$$

$$K_i>0\rightarrow T_i>0$$

Tapa 2

$$G_{CL}=\frac{K_ps+\frac{K_p}{T_i}}{s^2-s+K_ps+\frac{K_p}{T_i}}=\frac{T_iK_ps+K_p}{T_is^2-T_is+T_iK_ps+K_p}=\frac{T_iK_ps+K_p}{T_is^2+(K_pT_i-T_i)s+K_p}$$

Routhin kaavio

$$\begin{array}{cc} T_i & K_p \\ K_pT_i-T_i & 0 \\ K_p & \end{array}$$

$$T_i(K_p-1)>0\rightarrow K_p>1$$

$$T_i>0$$

Prosessi on stabiloitavissa, jos ym. stabiilisuusehdot täyttyvät.

c. Onko prosessi stabiloitavissa pelkällä P-säätäjällä? Jos on, jääkö lähtösuureeseen pysyvä poikkeama, kun referenssiin tulee askelheräte? (2p)

P-säätimellä

$$G_{tot} = \frac{K_p G}{1 + K_p G}$$

$$G_{tot} = \frac{K_p \frac{1}{s-1}}{1 + K_p \frac{1}{s-1}} = \frac{K_p \frac{1}{s-1}}{\frac{s-1+K_p}{s-1}} = \frac{K_p}{s-1+K_p}$$

$(K_p - 1 > 0 \rightarrow K_p > 1$ jolloin napa on vasemmassa puolitasossa ja suljettu systeemi asymptoottisesti stabiili).

$$G_{tot}(s=0) = \frac{K_p}{0-1+K_p} = \frac{K_p}{K_p - 1} = \frac{K_p}{K_p(1-1/K_p)} = \frac{1}{1-1/K_p}$$

Lähtösuureeseen jää pysyvä poikkeama toisin kuin b-kohdan PI-säätäjällä.

3. Tarkastellaan prosessia (2p)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] x(t) \end{cases}$$

a. Määritä siirtofunktio

$$C(sI - A)^{-1} B$$

$$[1 \quad 0]\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 0]\left(\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 0]\frac{\left(\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}\right)}{s(s+2)+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[s \quad 1]\frac{1}{s(s+2)+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+2)+1} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

b. Määritä prosessia kuvaava differentiaaliyhtälö (2p)

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$
$$Y(s^2 + 2s + 1) = U$$
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$$

c. Tutki onko systeemi stabiili ja jos on, määritä staattinen vahvistus askelherätteelle ohjauksesta prosessin lähtöön. (2p)

Prosessi on (asymptoottisesti) stabiili, koska molemmat navat s = -1

Tapa 1 (vaikeamman kautta)

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$
$$Y = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)^2}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

kerrotaan molemmat puolet $s(s+1)^2$:lla

$$\frac{1 \cdot s(s+1)^2}{s(s+1)^2} = \frac{As(s+1)^2}{s} + \frac{Bs(s+1)^2}{s+1} + \frac{Cs(s+1)^2}{(s+1)^2}$$
$$1 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = A(s^2 + 2s + 1) + Bs(s+1) + Cs$$
$$1 = As^2 + 2As + A + Bs^2 + Bs + Cs$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ C = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right\} = 1 - e^{-t} - \frac{t^1 e^{-t}}{1} = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$
$$k = \lim_{t \to \infty} y(t) = 1$$

Tapa 2: helpomman kautta

loppuarvoteoreema, kun systeemi on asymptoottisesti stabiili

$$k = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s^2 + 2s + 1}\frac{1}{s} = 1$$

4. Tutkitaan edelleen tehtävän 2 mukaista epästabiilia prosessia. Joku keksii kompensoida järjestelmän alla olevan kuvan mukaisesti supistamalla epästabiilin termin suoraan pois myötähaarassa. Kuvan merkitty tulosuureena referenssin lisäksi mahdollinen häiriösignaali D, joka summautuu ohjaukseen. Esitä lähtösuureen Y(s) riippuvuus tulosuureista R(s) ja D(s). Miten esitetty ratkaisu toimii? Johtopäätökset? (6p)

Lasketaan Y D:n ja R:n suhteen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y(s)} &= \frac{1}{s-1}\left\{\mathrm{D(s)} + \frac{s-1}{s+1}\big[\mathrm{R(s)} - \mathrm{Y(s)}\big]\right\} \\
&= \frac{1}{s-1}\mathrm{D(s)} + \frac{1}{s+1}\mathrm{R(s)} - \frac{1}{s+1}\mathrm{Y(s)}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Y(s)}\left[1 + \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1}{s-1}\mathrm{D(s)} + \frac{1}{s+1}\mathrm{R(s)}$$

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}\mathrm{D(s)} + \frac{1}{s+2}\mathrm{R(s)}$$

Lopputuloksesta nähdään, että kun häiriötä *D* ei ole, toimii hyvin. Mutta kun *D* ei ole nolla, lähtö menee epästabiiliksi. Opetus: Epästabiilin navan suoraa kompensointia säätäjällä ei saa koskaan tehdä. Häiriöitä esiintyy aina.