

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Malinen/Hirvi

Tentti 8.12.2022 klo. 9:00–12:00

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Kirjoita kaikkiin vastauspapereihisi oma nimesi ja opiskelijanumerosi. Laskimet ja taulukot kiellettyjä. Perustele vastauksesi. Pelkistä lopputuloksista (oikeista-kaan) ei pisteitä tule.

Kaikki periodien I/2022 tai II/2022 luentokurssille osallistuneet voivat halutesaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Selvitä suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3 + \sqrt{n} \sin(\pi n^3)}$.

Kohtien (a)–(c) maksimipistemäärät järjestyksessä (1p), (2p) ja (3p).

2. (a) Määritä funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ derivaatta $f'(x)$ kun $x \neq 0$. (2p)

(b) Laske toispuolinen raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

jossa f' on laskettu tehtävän ensimmäisessä osassa. (3p)

(c) Onko funktio f derivoituva pisteessä $x = 0$? (1p)

3. Määritä funktion $f(x) = e^{x-1} \sin(2x)$ Taylorin polynomi $P_3(x)$ käyttäen kehityskeskisteenä $x_0 = 0$. (6p)

4. Laske integraalit

$$(a) \int_0^2 20(x-2)^4 dx, (b) \int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \sin(\sqrt{x}) dx \text{ ja } (c) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Vihje: Toiseen integraaliin voi sijoittaa $x = u^2$.

Kustakin integraalista maksimipisteet (2p).

5. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku. Etsi differentiaaliyhtälön

$$xy' + ny = x, \quad x > 0,$$

se ratkaisu $y = y(x)$, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$. (6p)

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 4y = x^2$ yleinen ratkaisu $y = y(x)$. (6p)

Vihje: Kokeile sopivaa polynomia löytääksesi epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun.

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

Ethän unohda, että kurssitenttiin osallistuja saa palautekyselyyn vastaamisesta kokonaispisteskaalalla 0...100 kaksi ylimääräistä loppupistettä!