ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 22 **Välikoe 3, malliratkaisut**

opettaja: Matti Raasakka

Tehtävä 1

Valitse oikeat väitteet. (Kirjoita niitä vastaavat kirjaimet konseptipaperille.) Oikeasta väitteestä +3p, väärästä valinnasta −3p. (Kokonaispisteet kuitenkin minimissään 0.)

A) Laminaarivirtauksessa neste käyttäytyy kaoottisesti.
B) Heiluri suorittaa harmonista värähtelyliikettä.
C) Kappaleen massakeskipiste liikkuu kuin koko kappaleen massa olisi keskitetty yhteen pisteeseen.
D) Superpositiossa olevat aallot etenevät toisistaan riippumatta.
E) Kappaleen hitausmomentti riippuu pyörähdysakselista.
F) Leveämmän astian pohjalla on suurempi paine.
G) Painovoima on vahvin luonnon perusvuorovaikutuksista.
H) Ekvipartitioperiaatteen mukaan termisessä tasapainossa energia jakaantuu tasaisesti kaikille systeemin vapausasteille.
I) Pakonopeus on se nopeus, jolla kappale voi nousta planeetan pinnalta kiertoradalle.
J) Nesteeseen upotettuun kappaleeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän nestetilavuuden paino.

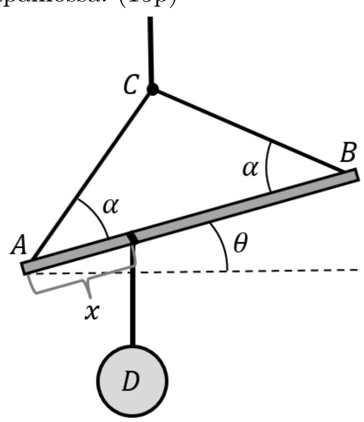
Malliratkaisu:

Oikeat vastaukset: C, D, E, H, J. (+3p per oikea vastaus)

A ei ole oikein, sillä turbulentissa virtauksessa neste käyttäytyy kaoottisesti, ja laminaarivirtauksessa virtaus on tasainen. B ei ole oikein, sillä heiluri on vain likimain harmoninen pienillä heilahtelukulman arvoilla. F ei ole oikein, sillä paine ei riipu nestepatsaan leveydestä, vaan vain syvyydestä. G ei ole oikein, sillä painovoima on heikoin perusvuorovaikutuksista. I ei ole oikein, sillä pakonopeus on nopeus, joka tarvitaan kappaleen irroittamiseksi kokonaan planeetan painovoimakentästä. (-3p per väärä vastaus)

Tehtävä 2

Tarkastellaan alla olevan kaltaista systeemiä, jossa hyvin kevyt taipumaton tanko (pituus L) on ripustettu molemmista päistään A ja B venymättömillä naruilla pisteeseen C, jonka suhteen narut pääsevät vapaasti kääntymään. Narut muodostavat kulman α tangon suhteen. Lisäksi tangosta on ripustettu paino D etäisyydelle x tangon päästä A. Selvitä tangon kulma θ vaakatasoon nähden etäisyyden x funktiona systeemin ollessa tasapainossa. (15p)

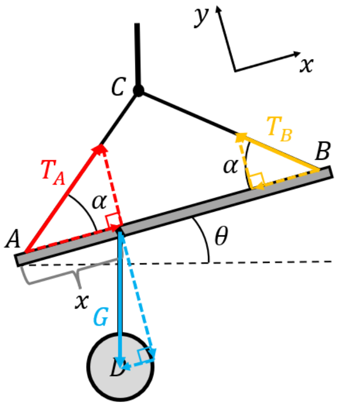


Malliratkaisu:

Tankoon vaikuttavat voimat alla olevan kuvan mukaisesti (1p per voima):

- vasemman narun tukivoima T_A

- oikean narun tukivoima T_B
- painon D kohdistama voima G



Valitaan x-akseli tangon suuntaisesti, ja y-akseli sitä vasten kohtisuoraan kuten kuvassa. (1p) (Muutkin vaihtoehdot mahdollisia, esim. x-akseli vaakasuoraan.) Jaetaan voimat koordinaattiakselien suuntaisiin komponentteihin (0,5p per komponentti)

$$\begin{aligned}
T_{A,x} &= T_A \cos\alpha \\
T_{A,y} &= T_A \sin\alpha \\
T_{B,x} &= -T_B \cos\alpha \\
T_{B,y} &= T_B \sin\alpha \\
G_x &= -G\sin\theta \\
G_y &= -G\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

Jotta tanko olisi tasapainossa, kokonaisvoiman (1p) ja kokonaisvoiman momentin (1p) täytyy hävitä. Tasapainoehdoksi kokonaisvoimalle x-suunnassa saadaan

$$T_{A,x} + T_{B,x} + G_x = T_A\cos\alpha - T_B\cos\alpha - G\sin\theta = 0\,. \quad \text{(1p)}$$

Tasapainoehdoksi kokonaisvoimalle y-suunnassa saadaan

$$T_{A,y} + T_{B,y} + G_y = T_A\sin\alpha + T_B\sin\alpha - G\cos\theta = 0\,. \quad \text{(1p)}$$

Tasapainoehdoksi kokonaisvoiman momentille pisteen A suhteen saadaan

$$G_y x + T_{B,y}L = -Gx\cos\theta + T_B L\sin\alpha = 0\,. \quad \text{(1p)}$$

Kokonaisvoiman momentin tasapainoehdosta saadaan ratkaistua

$$T_B = \frac{Gx\cos\theta}{L\sin\alpha}\,. \quad \text{(1p)}$$

Sijoitetaan y-suunnan tasapainoehtoon, ja saadaan

$$T_A\sin\alpha + \frac{Gx\cos\theta}{L} - G\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = \left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{G\cos\theta}{\sin\alpha}\,. \quad \text{(1p)}$$

Sijoittamalla lausekkeet T_A:lle ja T_B:lle x-suunnan tasapainoehtoon ja muokkaamalla yhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{G\cos\theta}{\sin\alpha}\cos\alpha - \frac{Gx\cos\theta}{L\sin\alpha}\cos\alpha - G\sin\theta &= 0 \\
\left(1-2\frac{x}{L}\right)\frac{G\cos\theta}{\sin\alpha}\cos\alpha - G\sin\theta &= 0 \qquad \mid\; : G\sin\theta \\
\left(1-2\frac{x}{L}\right)\frac{\cos\theta\cos\alpha}{\sin\theta\sin\alpha} - 1 &= 0 \\
\left(1-2\frac{x}{L}\right)\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\tan\alpha} &= 1 \qquad \mid\; \cdot\tan\theta \\
\left(1-2\frac{x}{L}\right)\frac{1}{\tan\alpha} &= \tan\theta
\end{aligned}$$

Kulmalle θ saadaan siis

$$\theta = \arctan\left[\left(1 - \frac{2x}{L}\right)\frac{1}{\tan\alpha}\right]. \quad (1p)$$

Tehtävä 3

Jääpala (massa m) asetetaan veteen (massa M), ja annetaan sulaa. Oletetaan systeemin olevan täysin eristetty ympäristöstä, ja että prosessin lopussa jäljellä on vain sulaa vettä. Merkitään veden ominaissulamislämpöä L ja veden ominaislämpökapasiteettia c.

a) Miten veden lämpötila pitäisi valita alussa, jotta jääpalan sulattua veden lämpötila olisi 0°C? (5p)
b) Selvitä systeemin entropian muutos prosessissa, kun veden alkulämpötila on a)-kohdan mukaisesti asetettu. (5p)
c) Voiko tarkastellun kaltainen prosessi tapahtua toiseen suuntaan? Perustele. (5p)

Malliratkaisu:

a) Jääpalaan siirtyy vedestä lämpömäärä $Q = Lm$ sen sulaessa. (1p) Tällöin siis vedestä poistuu lämpömäärä $-Q = cM\Delta T$, missä ΔT on veden lämpötilan muutos. (1p) Veden lämpötilan muutokselle prosessissa saadaan siis yhtälö

$$-Lm = cM\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = -\frac{Lm}{cM}. \quad (2p)$$

Jotta vesi olisi lopuksi nolla-asteista, täytyy veden lämpötilan alussa olla siis $\frac{Lm}{cM}$ celsiusasteissa. (1p)

b) Entropian muutokselle termodynaamisessa prosessissa pätee yleisesti kaava $\Delta S = \int_1^2 \mathrm{d}Q/T$. (1p) Jään sulaessa sen lämpötila on vakio $T_0 = 0°\mathrm{C} = 273{,}15$ K, ja siihen siirtyy lämpömäärä $Q = Lm$, joten entropian muutokselle sulamisessa saadaan $\Delta S_{\text{jää}} = Lm/T_0$, missä täytyy käyttää kelvinasteita lämpötilalle T_0. (1p)

Veden lämpötilan muuttuessa $\mathrm{d}T$:n verran siihen siirtyy lämpömäärä $\mathrm{d}Q = cM\mathrm{d}T$, ja entropian muutokselle saadaan

$$\Delta S_{\text{vesi}} = cM\int_1^2 \frac{\mathrm{d}T}{T} = cM(\ln T_2 - \ln T_1) = cM\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \quad (1p)$$

Tässä $T_1 = T_0 + \frac{Lm}{cM}$ ja $T_2 = T_0$ ovat lämpötilat prosessin alussa ja lopussa, joten

$$\Delta S_{\text{vesi}} = cM\ln\left(\frac{T_0}{T_0 + \frac{Lm}{cM}}\right). \quad (1p)$$

Entropian kokonaismuutokselle prosessissa saadaan siis

$$\Delta S_{\text{kok}} = \Delta S_{\text{jää}} + \Delta S_{\text{vesi}} = \frac{Lm}{T_0} + cM\ln\left(\frac{T_0}{T_0 + \frac{Lm}{cM}}\right). \quad (1p)$$

c) Jos $\Delta S_{\text{kok}} > 0$, niin prosessi on irreversiibeli, eli se ei voi tapahtua spontaanisti toiseen suuntaan. (2p) Osoitetaan, että $\Delta S_{\text{kok}} > 0$. Yllä olevasta lausekkeesta nähdään, että

$$\frac{\Delta S_{\text{kok}}}{cM} = \frac{Lm}{cMT_0} + \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{Lm}{cMT_0}}\right) = \frac{Lm}{cMT_0} - \ln\left(1 + \frac{Lm}{cMT_0}\right).$$

Tämä on suurempi kuin nolla, jos

$$\frac{Lm}{cMT_0} > \ln\left(1 + \frac{Lm}{cMT_0}\right). \quad (1p)$$

Merkitään selkeyden vuoksi muuttujaa $\frac{Lm}{cMT_0} = x$ ja eksponentioidaan molemmat puolet, jolloin saadaan ehto

$$e^x > 1 + x.$$

Tämä epäyhtälö pätee kaikilla x:n positiivisilla arvoilla, mikä voidaan nähdä esimerkiksi havaitsemalla, että kun $x = 0$, niin molemmilla funktioilla on sama arvo, ja e^x:n derivaatta e^x on suurempi kuin funktion x derivaatta 1 kaikilla $x > 0$. (1p) Näin ollen $\Delta S_{\text{kok}} > 0$, kun $\frac{Lm}{cMT_0} > 0$, eli kaikissa fysikaalisesti merkityksellisissä ja epätriviaaleissa tilanteissa. (1p) ($\frac{Lm}{cMT_0} = 0$ esimerkiksi, jos $m = 0$, mutta tällöin jääpalaa ei olisi lainkaan.)