

Kurssitentti ja yleinen tentti 20.2.2023 klo 9.00–12.00.

**Kurssitentin uusinta: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.**

Kaikki periodin III/2023 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Olkoot $a, b, c \in \mathbf{R}$ vakioita ja $f(x, y, z) = \sin(ax + by + cz)$.
a) Laske osittaisderivaatta

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

- b) Osoita, että funktiolle f on voimassa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \text{vakio} \cdot f.$$

Mikä on vakion arvo?

2. Implisiittinen tasokäyrä $g(x, y) = x^4 + y^3 - x^2y = 0$ esittää kuvion mukaisista ”perhosta” tai ”rusettia”, jossa näyttää olevan kaksi korkeinta kohtaa (eli y -koordinaatin maksimia). Määritä korkeimman kohdan y -koordinaatti valitsemalla jokin seuraavista neljästä vaihtoehdosta:

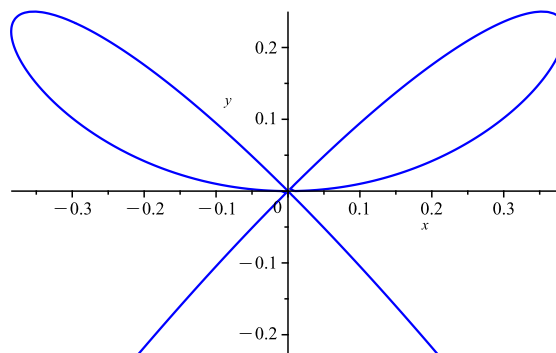
Tapa (i): Käyrän parametrisointiin $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$, $t \in \mathbf{R}$, liittyvä tangenttivektori $\mathbf{r}'(t)$ on vaakasuora;

Tapa (ii): Gradientin avulla muodostettu normaali $\mathbf{N} = \nabla g$ on pystysuora;

Tapa (iii): Implisiittisen derivoinnin jälkeen $y'(x) = 0$; tai

Tapa (iv): Lagrangen menetelmä funktiolle $f(x, y) = y$ sidosehdolla $g = 0$.

Vihje: Kaikissa laskutavoissa osa yhtälöistä jakaantuu tekijöihin, ja ne voidaan ratkaista ilman ”ratkaisukaavoja”. Kuvion perusteella järkevän näköinen ääriarvokohta tuottaa maksimin, eikä ääriarvon laatua tarvitse tutkia.



3. Määritä pinnan $x^3 + 3x^2y + y^2 + 2 \cos z = 13$ pisteeseen $(1, 2, 0)$ asetetun tangenttitason yhtälö.
4. Määritä funktion $f(x, y) = x^3 - 6xy$ suurin ja pienin arvo neliössä $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
5. Laske epäoleellinen integraali

$$\iint_D \frac{e^{-x^2y}}{x} dA,$$

kun

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 0\}.$$

6. Laske tasointegraali

$$\iint_D \sin(x^2 + y^2) dA,$$

kun D on origokeskinen $\sqrt{\pi}$ -säteinen puoliympyrä ylemmässä puolitasossa:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \pi, y \geq 0\}.$$

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentti voi uusia seuraavan tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet otetaan huomioon ja parempi tulos jää voimaan. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.