> MS-A0204, 20.2.2023, ratkaisut

>

Tehtävä 1

> $f := \sin(a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z)$

$$f := \sin(a\,x + b\,y + c\,z) \tag{1.1}$$

> $diff(f, x)$

$$a \cos(a\,x + b\,y + c\,z) \tag{1.2}$$

> $diff(f, x, x) + diff(f, y, y) + diff(f, z, z)$

$$-a^2 \sin(a\,x + b\,y + c\,z) - b^2 \sin(a\,x + b\,y + c\,z) - c^2 \sin(a\,x + b\,y + c\,z) \tag{1.3}$$

> $factor(\%)$

$$-\sin(a\,x + b\,y + c\,z)\,\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \tag{1.4}$$

Vakio on siis muotoa $-\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Lisätieto : Osittaisdifferentiaaliyhtälö $\Delta u + k^2 u = 0$ on nimeltään Helmholtzin yhtälö, ja se esiintyy monissa sovelluksissa.

Tehtävä 2

Lasketaan vain tavalla (i):

> $x := t - t^3; y := t^2 - t^4$

$$x := -t^3 + t$$

$$y := -t^4 + t^2 \tag{2.1}$$

> $diff(y, t) = 0$

$$-4\,t^3 + 2\,t = 0 \tag{2.2}$$

> $solve(\%)$

$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.3}$$

Kuvion perusteella kaksi jälkimmäistä parametrin arvoa tuottaa korkeimman kohdan.

> $subs\left(t = \frac{1}{\mathrm{sqrt}(2)}, y\right)$

$$\frac{1}{4} \tag{2.4}$$

Tämä on kysytty maksimi.

Tehtävä 3

Pinnan normaali saadaan määrittelevän funktion gradientin avulla:

> restart

> $g := (x, y, z) \rightarrow x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + y^2 - 2 \cdot \cos(z) - 13$

$$g := (x, y, z) \mapsto x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + y^2 - 2 \cdot \cos(z) - 13 \tag{3.1}$$

> with(VectorCalculus) :

> $Gradient(g(x, y, z), [x, y, z])$

$$\left(3\,x^2 + 6\,x\,y\right)\bar{e}_x + \left(3\,x^2 + 2\,y\right)\bar{e}_y + (2\sin(z))\bar{e}_z \tag{3.2}$$

> $subs(\{x = 1, y = 2, z = 0\}, \%)$

$$(15)\bar{e}_x + (7)\bar{e}_y + (2\sin(0))\bar{e}_z \tag{3.3}$$

> $simplify(\%)$

$$(15)\bar{e}_x + (7)\bar{e}_y + (0)\bar{e}_z \tag{3.4}$$

Tästä saadaan tangenttitason kertoimet ja vakiotermin voi selvittää sijoittamalla annettu piste.

> $d = 15 \cdot x + 7 \cdot y$

$$d = 15\,x + 7\,y \tag{3.5}$$

> $subs(\{x = 1, y = 2\}, \%)$

$$d = 29 \tag{3.6}$$

Tangenttitason yhtälö on siis $15\,x + 7\,y = 29$.

Tehtävä 4

> restart

> $f := (x, y) \rightarrow x^3 - 6 \cdot x \cdot y$

$$f := (x, y) \mapsto x^3 - 6 \cdot y \cdot x \tag{4.1}$$

> $diff(f(x, y), x) = 0, diff(f(x, y), y) = 0$

$$3\,x^2 - 6\,y = 0,\ -6\,x = 0 \tag{4.2}$$

> $solve(\{\%\})$

$$\{x = 0, y = 0\} \tag{4.3}$$

Ainoa kriittinen piste on neliö reunalla, joka täytyy muutenkin tutkia erikseen, joten tutkitaan reunan osat:

> $f(x, 0)$

$$x^3 \tag{4.4}$$

Tämä on aidosti kasvava, joten vain päätepisteet mukaan.

> $f(0, y)$

$$0 \tag{4.5}$$

> $f(x, 1)$

$$x^3 - 6\,x \tag{4.6}$$

> $solve(diff(\%, x) = 0)$

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \tag{4.7}$$

Kumpikaan piste ei kuulu tutkittavalle välille [0, 1]; ei ääriarvoja täman reunajanan sisällä.

> $f(1, y)$

$$1 - 6y \tag{4.8}$$

Tämä on aidosti vaheneva, joten tästäkin vain päätepisteet mukaan.

Tulos: Max ja min saavutetaan joissakin neliön kärkipisteissa:

> $f(0,0), f(1,0), f(0,1), f(1,1)$

$$0, 1, 0, -5 \tag{4.9}$$

Maksimi on siis 1 ja minimi -5.

Tehtävä 5

Integroidaan aluksi vain arvoon R kummankin muuttujan suhteen.
Integrointi on helppoa vain muuttujan y suhteen:

> $int\left(\frac{\exp(-x^2 \cdot y)}{x}, y\right)$

$$-\frac{e^{-x\sim^2 y}}{x\sim^3} \tag{5.1}$$

> $assume(x > 0)$

> $about(x)$

```
Originally x, renamed x~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

> $int\left(\frac{\exp(-x^2 \cdot y)}{x}, y = 0..\text{infinity}\right)$

$$\frac{1}{x\sim^3} \tag{5.2}$$

> $int(\%, x = 1..\text{infinity})$

$$\frac{1}{2} \tag{5.3}$$

Integraalin laskeminen aluksi suorakulmiossa $[1, R] \times [0, R]$ olisi parempi tapa,
mutta silloin jälkimmäinen integraali on "mahdoton". Tällä tavalla laskemalla
voi saada täydet pisteet, jos idea selviää loppuun saakka, vaikka lasku jääkin kesken.

Tehtävä 6

Käytetään napakoordinaatistoa, jossa pinta-alan paikallinen suurennussuhde on r.

> $int(r \cdot \sin(r^2), r = 0..\text{sqrt}(\text{Pi}))$

$$1 \tag{6.1}$$

> $int(\%, \theta = 0..\text{Pi})$

$$\pi \tag{6.2}$$