



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula

Tentti, 21.2.2022



Moniosaisten tehtävien osien painoarvo on sama ellei muuta ole erikseen osoitettu. Maksimipistemäärä kokeessa on 36.

TEHTÄVÄ 1 a) Tutki funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

käyttäytymistä origon lähellä pitkin suoria $y = kx$, $k > 0$ vakio, eli tarkastele lausekkeita $f(x, kx)$, kun $x \rightarrow 0$.

b) Osoita, että funktiolla on raja-arvo origossa.

TEHTÄVÄ 2 Pinnat $z = x/y$ ja $z = x^2y$ leikkaavat toisensa pitkin erästä avaruuskäyrää, joka kulkee pisteen $(1, 1, 1)$ kautta. Määritä leikkauskäyrän tangenttivektori tässä pisteessä.

TEHTÄVÄ 3 Määritä funktion

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

a) gradientti pisteessä $(1, 2, 2)$.

b) suunnattu derivaatta $D_e f(1, 2, 2)$ vektorin $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ määräämän yksikkövektorin \mathbf{e} suuntaan.

c) Mihin suuntaan funktio f kasvaa nopeimmin pisteessä $(1, 2, 2)$?

TEHTÄVÄ 4 Määritä ellipsin $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$ puoliakseleiden pituudet etsimällä etäisyyden neliön $f(x, y) = x^2 + y^2$ sidotut ääriarvot Lagrangen menetelmällä.

TEHTÄVÄ 5 Laske epäoleellinen integraali

$$\iint_K \frac{dA}{x\sqrt{y}},$$

kun K on kolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(2, 0)$ ja $(2, 8)$.

TEHTÄVÄ 6 Määritä tasoalueen

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$$

keskiö (\bar{x}, \bar{y}) .