ELEC-C3220 Kvantti-ilmiöt, kevät 23 **Välikoe 1, malliratkaisut**
opettaja: Matti Raasakka

Tehtävä 1

Selitä seuraavat käsitteet yhdellä tai kahdella kokonaisella lauseella. (1p/kohta)
a) mustan kappaleen säteilyn UV-katastrofi **b)** aaltohiukkasdualismi **c)** kaksoisrakokoe
d) kvanttimekaniikan mittausongelma **e)** komplementaariset suureet **f)** kvanttiparallelismi

Malliratkaisu:

a) Mustan kappaleen säteilyn UV-katastrofilla viitataan siihen klassisen fysiikan mukaiseen tulokseen, että valoa heijastamattoman ('mustan') kappaleen lämpösäteilyn energiatiheys kasvaa rajatta pienillä aallonpituuksilla. (1p)

b) Aaltohiukkasdualismilla tarkoitetaan, että kvanttimekaaniset hiukkaset voivat joissain tilanteissa käyttäytyä kuin normaalit klassiset hiukkaset ja joissain toisissa tilanteissa kuin aallot, riippuen siitä mitä hiukkasten ominaisuuksia tarkastellaan tai mitataan. (1p)

c) Kaksoisrakokoe on koejärjestely, joka havainnollistaa kvanttihiukkasten aaltohiukkasdualismia. (0,5p) Koejärjestelyssä hiukkasia ammutaan kahteen rakoon, mistä johtuen muodostuu hiukkassäteilyn intensiteettiin interferenssikuvio takalevylle (aaltoluonne), vaikkakin hiukkasten voidaan havaita saapuvan takalevylle yksitellen (hiukkasluonne). (0,5p)

d) Kvanttimekaniikan mittausongelmaksi kutsutaan tyydyttävän fysikaalisen selityksen puutetta sille ilmiölle, että kvanttitila romahtaa mittaustulosta vastaavaan tilaan systeemiä mitattaessa. (1p)

e) Komplementaariset suureet, kuten paikka ja liikemäärä, ovat suureita, joita vastaavat operaattorit eivät kommutoi keskenään, eli suureita ei voi yhtäaikaisesti mitata mielivaltaisella tarkkuudella. (1p)

f) Kvanttiparallelismiksi kutsutaan kvanttilaskennan ominaisuutta, jossa monta eri laskutoimitusta voidaan suorittaa yhtäaikaisesti kvanttitilojen superposition avulla. (1p)

Tehtävä 2

Tarkastellaan kvanttihiukkasta (massa m) yksiulotteisessa äärettömässä potentiaalikaivossa (leveys L). Hiukkasen energian ominaistilojen $|\phi_n\rangle$ aaltofunktiot saavat välillä $[0,L]$ arvot

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) ,$$

missä $n = 1,2,3,\ldots$ on energian kvanttiluku. Välin $[0,L]$ ulkopuolella aaltofunktio häviää, eli saa arvon nolla. Hamiltonin operaattorin ominaisarvot ovat $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}$. Ajanhetkellä $t = 0$ hiukkasen tilaa kuvaa tilavektori $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_1\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_2\rangle$.

a) Laske hiukkasen energian odotusarvo ja varianssi. (3p)
b) Muodosta hiukkasen aaltofunktio mielivaltaisella ajanhetkellä $t = T$. (3p)

Malliratkaisu:

a) Hamiltonin operaattori $\hat{H}$ mittaa systeemin kokonaisenergiaa, joten tilat $|\phi_n\rangle$ ovat Hamiltonin operaattorin ominaistiloja ominaisarvoilla $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}$. (1p) Energian odotusarvo:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_1| + i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle\phi_2|\right)\hat{H}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_1\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_2\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_1| + i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle\phi_2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}E_1|\phi_1\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}}E_2|\phi_2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{3}E_1\underbrace{\langle\phi_1|\phi_1\rangle}_{=1} - i\frac{\sqrt{2}}{3}E_2\underbrace{\langle\phi_1|\phi_2\rangle}_{=0} + i\frac{\sqrt{2}}{3}E_1\underbrace{\langle\phi_2|\phi_1\rangle}_{=0} + \frac{2}{3}E_2\underbrace{\langle\phi_2|\phi_2\rangle}_{=1} \\
&= \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2 = \frac{1}{3}\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{2}{3}\frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right)\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} = \frac{3}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} \qquad \text{(1p)}
\end{aligned}
$$

Energian neliön odotusarvo:

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle &= \frac{1}{3}E_1^2 + \frac{2}{3}E_2^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{12} + \frac{8}{3}\right)\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\right)^2 = \frac{11}{4}\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Energian varianssiksi saadaan siis:

$$
\begin{aligned}
\sigma_E^2 &= \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2 \\
&= \left(\frac{11}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\right)^2 \qquad \text{(1p)}
\end{aligned}
$$

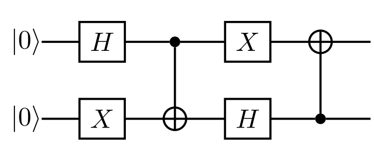
b) Energian ominaistilat kehittyvät ajassa seuraavasti: $|\phi_n(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar}|\phi_n\rangle$. (1p) Koska aikakehitys on lineaarista, niin aaltofunktio ajanhetkellä $t = T$ voidaan kirjoittaa energian ominaistilojen avulla välillä $[0,L]$ muodossa

$$
\begin{aligned}
\psi(x,T) &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-iE_1T/\hbar}\phi_1(x) - i\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-iE_2T/\hbar}\phi_2(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-iE_1T/\hbar}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - i\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-iE_2T/\hbar}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{3L}}e^{-iE_1T/\hbar}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - i\sqrt{\frac{4}{3L}}e^{-iE_2T/\hbar}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \qquad \text{(1,5p)}
\end{aligned}
$$

Välin $[0,L]$ ulkopuolella aaltofunktio on identtisesti nolla kaikilla ajanhetkillä. (0,5p)

Tehtävä 3

Tarkastellaan alla olevaa kvanttipiiriä.



a) Selvitä piirin lopputila. (2p)
b) Ovatko kubitit kietoutuneet keskenään lopputilassa? Perustele. (2p)
c) Laske suureen X odotusarvo piirin alemmalle kubitille lopputilassa. (2p)

VINKKI: Sekä portti X että havaintosuure X voidaan määritellä sen avulla, miten se kuvaa yhden kubitin kantatilat: $X|0\rangle = |1\rangle$ and $X|1\rangle = |0\rangle$.

Malliratkaisu

a) Alkutila $|\psi_0\rangle = |00\rangle$. Ensimmäisten yhden kubitin porttien jälkeen

$$|\psi_1\rangle = (H \otimes X)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \qquad \text{(0,5p)}$$

Ensimmäisen CNOT-portin jälkeen

$$|\psi_2\rangle = \mathrm{CNOT}_{1,2}|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \qquad \text{(0,5p)}$$

Toisten yhden kubitin porttien jälkeen

$$|\psi_3\rangle = (X \otimes H)|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|10\rangle - |11\rangle + |00\rangle + |01\rangle) \qquad \text{(0,5p)}$$

Toisen CNOT-portin jälkeen lopputilaksi saadaan

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle = \mathrm{CNOT}_{2,1}|\psi_3\rangle &= \frac{1}{2}(|10\rangle - |01\rangle + |00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \qquad \text{(0,5p)} \end{aligned}$$

b) Jos kubitit eivät ole kietoutuneet, niin tila voidaan esittää tulotilana muodossa

$$\begin{aligned} |\phi\rangle|\chi\rangle &= (\phi_0|0\rangle + \phi_1|1\rangle)(\chi_0|0\rangle + \chi_1|1\rangle) \\ &= \phi_0\chi_0|00\rangle + \phi_0\chi_1|01\rangle + \phi_1\chi_0|10\rangle + \phi_1\chi_1|11\rangle \end{aligned}$$

missä ϕ_0,ϕ_1,χ_0,χ_1 ovat jotain kompleksiarvoisia kertoimia. (0,5p) Vaatimuksesta $|\phi\rangle = |\psi_4\rangle$ saadaan neljä yhtälöä kantavektorien kertoimille

$$\phi_0\chi_0 = \frac{1}{2}\,, \quad \phi_0\chi_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad \phi_1\chi_0 = \frac{1}{2}\,, \quad \phi_1\chi_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Näistä voidaan esimerkiksi ratkaista toisesta yhtälöstä $\chi_1 = -\frac{1}{2\phi_0}$ ja kolmannesta yhtälöstä $\phi_1 = \frac{1}{2\chi_0}$. Ottamalla näiden tulo saadaan

$$\phi_1\chi_1 = -\frac{1}{4\phi_0\chi_0} = -\frac{1}{2}\,,$$

missä toisessa askeleessa käytettiin ensimmäistä yhtälöä $\phi_0\chi_0 = \frac{1}{2}$. Näin saatiin kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä johdettua yhtälö, joka on ristiriidassa neljännen yhtälön $\phi_1\chi_1 = \frac{1}{2}$ kanssa. Yhtälöihin ei siis ole olemassa ratkaisua, eikä tilaa $|\psi_4\rangle$ voi siten esittää tulotilana. (0,5) Kubitit ovat siis kietoutuneet. (1p)

c) Odotusarvo voidaan laskea esimerkiksi seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \langle\psi|I \otimes X|\psi\rangle &= \frac{1}{4}((\langle 00| - \langle 01| + \langle 10| + \langle 11|)(|01\rangle - |00\rangle + |11\rangle + |10\rangle) \\ &= \frac{1}{4}(-\underbrace{\langle 00|00\rangle}_{=1} - \underbrace{\langle 01|01\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle 10|10\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle 11|11\rangle}_{=1}) = 0\,, \qquad \text{(2p)} \end{aligned}$$

missä huomioitiin, että vektorit $|00\rangle$,$|01\rangle$,$|10\rangle$,$|11\rangle$ muodostavat ortonormaalin kannan.