Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Tölle/Takala
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0108 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (kevät)

Kurssitentti ja yleinen tentti 21.4.2023 klo 13.00–16.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun (max. 30p).
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää (max. 36p).
Kaikki IV-periodin luentokurssille osallistuneet voivat siis halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää". Jokaisesta tehtävästä voi saada max. 6p.

1. Selitä lyhyesti (ilman perusteluja) seuraavat sarjoihin liittyvät käsitteet:
   a) Geometrinen sarja, sen suppeneminen ja summa;
   b) Yli-, ali- ja harmoninen sarja sekä niiden suppeneminen;
   c) Sarjoihin liittyvä suhdetesti ja mitä sen avulla voidaan päätellä.

2. a) Olkoon $c > 0$ vakio. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{cn + 2\sqrt{n}}{c^2 - n\sqrt{c}}.$$

   b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}.$$

3. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}.$$

   a) Miten $f(0)$ pitää määritellä, jotta funktiosta f tulee jatkuva kohdassa $x = 0$?
   Vinkki: L'Hospitalin sääntö.
   b) Millainen polynomiapproksimaatio funktiolle f saadaan, jos $g(x) = \ln(1+3x)$ korvataan funktion g Maclaurin-polynomilla $P_4(x)$?
   Lisätieto: Maclaurin = Taylor pisteen $x_0 = 0$ suhteen.

4. a) Osoita, että funktio $f\colon [0, \pi/2[\to [0, \infty[$, $f(x) = 2x\tan x$, on aidosti kasvava. Tästä seuraa, että sillä on käänteisfunktio f^{-1}, mutta tarkempaa perustelua ei vaadita.
   b) Laske $f(\pi/4)$ ja tätä tietoa käyttämällä $(f^{-1})'(\pi/2)$.

   Huom. Seuraavalla sivulla on eräiden trigonometristen funktioiden arvoja.

5. a) Laske osittaisintegrointia käyttämällä integraali

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx.$$

b) Oletetaan tunnetuksi, että

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Laske sijoitusta $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ käyttämällä epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

ottaen huomioon epäoleellisen integraalin määritelmä.

6. a) Määritä differentiaaliyhtälölle $y' = y + 2\sin x$, sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 1$.
b) Määritä differentiaaliyhtälölle $y'' + 3y' = 4y$, sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y'(0) = y(0) = 1$.

Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0

Eräitä kaavoja ja Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x\\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x\\
\frac{d}{dx}\tan x &= 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\\
\frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2}\\
\frac{1}{1-x} &\approx 1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k\\
e^x &\approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\\
\ln(1+x) &\approx x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\\
\sin x &\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
\cos x &\approx 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

Huom. MS-A0108-kurssitentin voi uusia V-periodin tentin yhteydessä 8.6.2023.
Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.