ELEC-C1230 Säätötekniikka
Tentti 20. 4. 2023

- *Merkitse kaikkiin vastauspapereihin nimesi ja opintonumerosi.*
- *Kokeessa voi osallistua joko välikokeeseen tai tenttiin. Merkitse selvästi vastauspaperiin, kumpaan kokeeseen osallistut. Vain toiseen kokeeseen voi osallistua.*
- *Sallitut apuvälineet: Laskin sekä kurssisivuilla oleva kaavakokoelma, erillinen Laplace-muunnostaulukko, Z-muunnostaulukko. Jokainen tuo nämä mukanaan kokeeseen.*
- *Laskinta saa käyttää vain apuvälineenä numeerisiin laskuihin. Ratkaisut eivät siis saa perustua yksinomaan laskimen käyttöön.*
- *Kokeessa on viisi (5) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt. Pelkkien tulosten antaminen ilman, että esitetään, miten ne on saatu, ei kelpaa hyväksyttäväksi ratkaisuksi.*

---

1. Tarkastellaan PID-säädintä, jonka perusversio ("oppikirjaversio") on

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{-\infty}^{t} e(s)ds + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

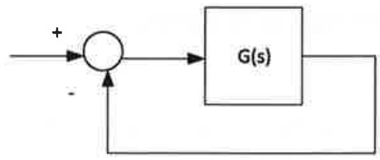
Symbolit vastaavat kurssilla käytettyjä merkintöjä.

a. Esitä säätäjä Laplace-tasossa ja piirrä Simulinkin kaltainen diagrammi säätimestä. (2p)

b. Minkälaisia modifikaatioita derivointitermissä yleensä käytetään? Miksi? (2p)

c. Mainittu säätäjä on onnistunut ajamaan erosuureen nollaan. Vastaa ja perustele: Tarkoittaako tämä, että ohjaussuure on myös nolla? (2p)

2. Tarkastellaan prosessia $G(s) = \dfrac{3}{s(s+1)^2}$ ja suljettua systeemiä

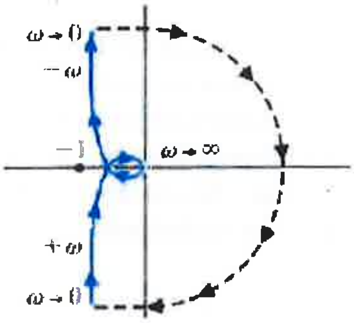


a. Laske, missä negatiivisen reaaliakselin pisteessä $G(s)$:n Nyquistin diagrammi leikkaa reaaliakselin. (2p)

b. Käytä Nyquistin stabiilisuuslausetta ja määritä, onko suljettu systeemi stabiili. (2p)

c. Verifioi tulos käyttämällä Routh-Hurwitz-menettelyä. (2p)

Ohje: Alla olevassa kuvassa on siirtofunktion $H(s) = \dfrac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ Nyquistin diagrammi. Se on piirretty eräillä parametrien K, τ_1 ja τ_2 arvoilla, jotka eivät näy kuvassa. Huomaa, että näiden parametrien arvoista riippuu, missä käyrä leikkaa negatiivisen reaaliakselin (ei siis välttämättä pisteen (-1,0) ja origon välissä kuten kuvassa).



3. Olet suunnittelemassa säätäjää prosessille, josta sinulla on tilamalli käytettävissä. Päätät käyttää tilatakaisinkytkettyä säätölakia. Referenssisuure saattaa olla nollasta poikkeava. Vastaa seuraaviin kysymyksiin käyttämättä yhtälöitä.

a. Selitä sanallisesti, miten saavutettavuuden ja tarkkailtavuuden käsitteet liittyvät suunnitteluun. (2p)
b. Selitä sanallisesti, milloin tarvitset ja milloin et tarvitse tilatarkkailijaa. (2p)
c. Selitä sanallisesti, miten otat suunnittelussa huomioon sen, että referenssisuure voi olla nollasta poikkeava. Voit ajatella, että se koostuu askelmaisista muutoksista. (2p)

4. Tutkitaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1^2(t)x_2(t) - 1 \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ y(t) = x_1^2(t) \end{cases}$$

a. Määrää systeemin kaikki tasapainopisteet. (2p)
b. Linearisoi systeemi tasapainopisteen $x_{1s} = 0.5$, $x_{2s} = 2$, $u_s = 0$ ympäristössä. Esitä tulokset standardiesitysmuodossa (lineaarinen tilaesitys). (4p)

5. Tutkitaan diskreettiaikaista systeemiä, jota kuvaava differenssiyhtälö on

$$y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = u(k)$$

ja vakioparametrit $a = 2\sqrt{b}$, $b > 0$. Alkuarvot oletetaan nolliksi.

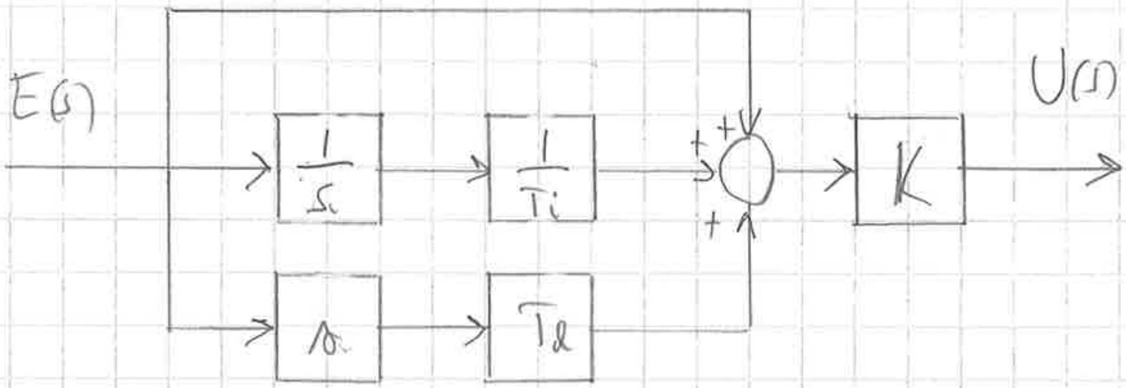
a. Määritä systeemille tilaesitys. Voit itse valita sopivat tilamuuttujat. (3p)
b. Määritä pulssinsiirtofunktio. Millä parametrien arvoilla systeemi on stabiili? (3p)

Ohje:
$$Z(y(k+2)) = z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)$$
$$Z(y(k+1)) = zY(z) - zy(0)$$

ELEC-C1230 Säätötekniikka | Tentti 20.4.2023

Ratkaisut

1. a) $U(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right]E(s)$



b. Puhdas derivointi on häiriöherkkä operaatio, ja siksi erosuureen suoraa derivoimista pyritään välttämään (erosuureessa on yleensä kohinaa). Lisätään derivointi-osaan ylimääräinen $T_d s$-termi

$$T_d s \approx \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s}$$ joka rauhoittaa derivointia.

Haittana on ylimääräinen parametri N. Sitten voidaan ajatella, että referenssi on suurimman osan aikaa vakio, eli $\frac{d}{dt}e = \frac{d}{dt}(r-y) \approx -\frac{dy}{dt}$. Säätäjän derivointiosa korvataan termillä $-K\frac{T_d s}{1+\frac{T_d}{N}s}Y(s)$.

c) Ei. Suhdeosa (P-osa) ja derivointiosa menevät kyllä nollaan. Mutta ohjauksen integroiva osa:

$$u_i = \frac{K}{T_i}\int e(t)\,dt \Rightarrow \dot{u}_i(t) = \frac{K}{T_i} e(t) \to 0$$

$$\Rightarrow u_i(t) \to \text{vakioarvoa (ei välttämättä nollaa)}$$

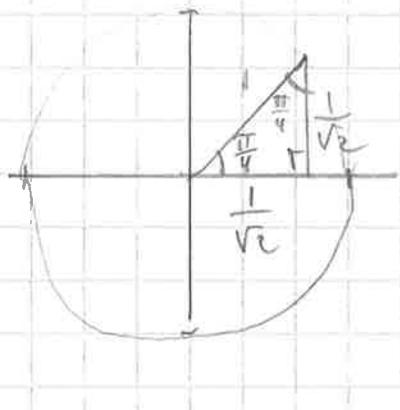
Nollasta poikkeava integraattorin arvo pitää käytännössä toimilaitteen siinä vakioarvossa, jolla lähtösignaalin arvo = referenssisignaalin arvo

2 Avoimen järjestelmän siirtofunktio eli luupinsiirtofunktio on $L(s) = G(s) = \frac{3}{s(s+1)^2}$

a) $L(j\omega) = G(j\omega) = \frac{3}{j\omega(1+j\omega)(1+j\omega)}$

$$\angle L(j\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega) - \arctan(\omega)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - 2\arctan(\omega) = -\pi$$



$$\Rightarrow 2\arctan(\omega) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

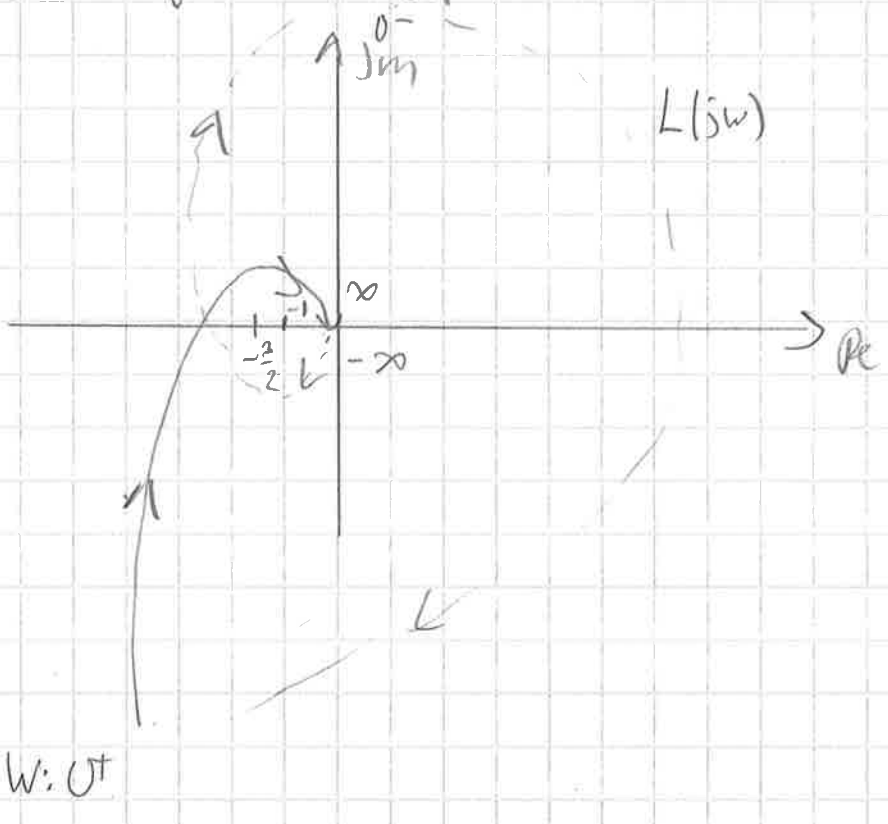
$$\Rightarrow \arctan(\omega) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan[\arctan(\omega)] = \omega = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Tällä kulmataajuudella vahvistus on

$$|L(j\omega)| = \frac{3}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{3}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{3}{1\cdot(1+1^2)} = \frac{3}{2}$$

Nyquistin käyrä leikkaa siis reaaliakselin pisteessä $(-\frac{3}{2}, 0)$.

b) Taajuudella 0 vaihe on $-\frac{\pi}{2}$. Kun taajuus lähestyy ääretöntä, vahvistus lähenee nollaa. Hahmotelma Nyquistin diagrammiksi on



Luupinsiirtofunktiolla ei ole yhtään napaa oikeassa puolitasossa. Nyquistin diagrammi kiertää kriittisen pisteen (-1, 0) kaksi kertaa myötäpäivään.

Nyquistin stabiilisuuslauseen mukaan

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

eli suljetulla systeemillä on kaksi napaa oikeassa puolitasossa. Suljettu systeemi on epästabiili.

c. Karakteristinen yhtälö

$$1 + L(s) = 1 + \frac{3}{s(s+1)^2} = \frac{s(s+1)^2 + 3}{s(s+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 2s^2 + s + 3 = 0$$

Routh-Hurwitz:

s^3	1	1	0
s^2	2	3	0
s^1	$-\frac{1}{2}$	0	0
s^0	3		

$\Uparrow$

Kaksi merkinvaihtoa. Polynomilla on kaksi nollaa oikeassa puolitasossa.

3a. Tarkastellaan regulointiprobleemaa (referenssisignaali on 0)
Jos systeemi on saavutettava, säädövirheen dynamiikka voidaan asetella vapaavalintaisesti. (Virheen dynamiikkaa kuvaavat navat voidaan asetella halutusti kompleksitasossa)
Tämä tarkoittaa esimerkiksi, että säätöjäystä saadaan mielivaltaisen nopea, ohjaussignaalin kasvun kustannuksella tosin.
Jos systeemi on tarkkailtava, voidaan suunnitella tilatarkkailija siten, että tarkkailijavirheen dynamiikka on vapaasti valittavissa. Tarkkailijavirhe tarkoittaa todellisen tilan ja estimoidun tilan virhettä ajan funktiona.
Periaatteessa voidaan siis suunnitella äärimmäisen nopea tarkkailija, jonka virhe menee nollaan hyvin lyhyessä ajassa. Tällainen tarkkailija on kuitenkin altis häiriöille.

b) Tilatakaisinkytkentä on tilan funktio. Jos tila on mitattavissa, se on säädölain käytettävissä ja tarkkailijaa ei tarvita. Jos tilaa ei tunneta, käytetään tarkkailijaa. Näin estimoitua tilaa käytetään sitten säädölaissa.

c) Etukompensaattorilla asetetaan suljetun piirin staattinen vahvistus (askelherätteelle) referenssistä säädettyyn suureeseen arvoon 1.
Tällöin lähtösuure seuraa asymptoottisesti askelmuotoista referenssiä.

Toinen vaihtoehto on lisätä säätäjään integraattori, joka poistaa pysyvän poikkeaman. [Tämä oli määritelty ylikurssiksi : ei vaadita].

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 x_2 - 1 & f_1 \\ \dot{x}_2 = u & f_2 \\ y = x_1^2 & g \end{cases}$

a) Tasapainopisteissä derivaatat ovat nollia.

$$2x_1^2 x_2 - 1 = 0 \qquad u = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_{2s} = \dfrac{1}{2x_{1s}^2}, \quad x_{1s} \in \mathbb{R},\ x_{1s} \neq 0 \\ u_s = 0 \\ y_s = x_{1s}^2 \end{cases}$$

$s \hat{=}$ tasapainopiste

b) Tarkastellaan muutoksia toimintapisteeseen nähden

$\Delta x = x - x_s$, $\Delta u = u - u_s$, $\Delta y = y - y_s$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= g(x,u) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta\dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_s \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_s \Delta u \\ \Delta y &= \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_s \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_s \Delta u \end{aligned}$$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_s = 4x_1x_2\Big|_s = 4x_{1s}x_{2s}$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_s = 0$ $\qquad \frac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_s = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_s = 2x_1^2\Big|_s = 2x_{1s}^2$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_s = 0$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_s = 1$

$\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big|_s = 2x_1\Big|_s = 2x_{1s}$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_s = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x_2}\Big|_s = 0$

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_{1s}x_{2s} & 2x_{1s}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 2x_{1s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \Delta u$$

joka on lineaarisen tilaesityksen muodossa

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Sijoitetaan vielä lukuarvot

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \Delta u$$

5.

$$y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = u(k)$$

$$a = 2\sqrt{b}, \ b > 0$$

a) Kokeillaan ensin $x_1(k) = y(k)$

$x_2(k) = y(k+1)$

$$\Rightarrow \quad x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) = -b\,x_1(k) - a\,x_2(k) + u(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Onnistui. Eli:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Toinen tapa voisi olla käyttää q-menetelmää

$$q^2 y(k) + aq\,y(k) = -by(k) + u(k)$$

$$\underbrace{q\Big[\underbrace{q\,y(k)}_{x_1} + ay(k)\Big]}_{x_2} = -by(k) + u(k)$$

$$x_1(k) = y(k); \quad x_2(k+1) = -b\,x_1(k) + u(k), \quad x_1(k+1) + ax_1(k) = x_2(k)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Aika lailla saman näköinen. Tilamuuttujat on kuitenkin osin valittu eri tavoin. Pulssinsiirtofunktio tulee samaksi, käytetään sitten kumpaa tilaesitystä tahansa.

b) Pulssinsiirtofunktio saadaan helpoiten z-muuntamalla differenssiyhtälö. Alkuarvot nolliksi

$$y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = u(k)$$

$$z^2 Y(z) + azY(z) + bY(z) = U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + az + b}$$

$a = 2\sqrt{b} > 0$

$b > 0 \Rightarrow a > 0$

Napapolynomi eli karakteristinen polynomi $z^2 + az + b$

Stabiilisuusalue kompleksitasossa on yksikköympyrän sisäpuoli. $z^2 + az + b = 0 \Rightarrow z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{4b - 4b}}{2}$

$= -\frac{a}{2}$ Kaksoisnapa.

$$-1 \underbrace{\leq}_{a>0 \text{ toteutuu aina}} -\frac{a}{2} \leq 1 \Rightarrow 0 < a \leq 2$$