MS-C2111 Stochastic processes
Department of Mathematics and Systems Analysis
Aalto University

Exam
07.06.2023
E Peltola & O Abuzaid

Tentissä on 4 tehtävää, kukin arvoltaan 6 pistettä. Tentissä **ei** saa käyttää laskinta, mutta saa käyttää A4-kokoista **muistiinpanolappua**. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero.

1 Tarkastellaan prosesseja tilajoukolla $S = \{1, 2, 3\}$, sekä seuraavia matriiseja:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_5 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Perustele vastauksesi alla oleviin kysymyksiin.

(a) **(1p.)** Mitkä matriiseista ovat siirtymämatriiseja?

(b) **(2p.)** Millä siirtymämatriiseista on yksikäsitteinen tasapainojakauma? Valitse yksi näistä matriiseista ja laske sen tasapainojakauma.

(c) **(1p.)** Valitse yksi siirtymämatriisi. Olkoon $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sitä vastaava Markov-ketju. Kun tiedetään, että $X_6 = 1$, mikä on todennäköisyys, että $X_9 = 1$?

(d) **(1p.)** Mitkä matriiseista ovat generaattorimatriiseja?

(e) **(1p.)** Valitse yksi generaattorimatriisi. Olkoon $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sitä vastaava jatkuva-aikainen Markov-ketju. Kun $Z_2 = 2$, miten laskisit tietokoneen avulla todennäköisyyden sille, että $Z_5 = 3$?

2 (a) Olkoon $N = (N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = 1$ (yksiköissä $\frac{1}{\text{min}}$, missä ajan yksikkö t on minuuteissa, min), joka mallintaa A Bloc -ravintolassa asioivien asiakkaiden lukumäärää lounasaikaan[1]. Oletetaan, että 60% asiakkaista on kasvissyöjiä ja 40% kaikkiruokaisia, toisistaan riippumatta. Olkoon $N_1(t)$ ja $N_2(t)$ vastaavasti kasvissyöjien ja kaikkiruokaisten asiakkaiden lukumäärä ajanhetkellä t. Perustele vastauksesi alla oleviin kysymyksiin.

(i) **(1p.)** Mikä on ravintolaan tunnin aikana saapuvien kasvissyöjien lukumäärän odotusarvo?

(ii) **(1p.)** Mikä on todennäköisyys $\mathbb{P}[N_1(20) = 15]$ sille, että 20 minuutissa 15 kaikkiruokaista asiakasta saapuu ravintolaan?

(iii) **(2p.)** Mikä on ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}[N_2(30) = 20 \mid N_2(20) = 15]$ sille, että puolen tunnin aikana 20 kaikkiruokaista asiakasta saapuu ravintolaan, kun 15 kaikkiruokaista asiakasta on saapunut ravintolaan jo ensimmäisen 20 minuutin aikana?

[1]Mallin yksinkertaistamiseksi oletetaan, ettei kukaan ole vielä poistunut ravintolasta, vaikka uusia asiakkaita edelleen saapuu

(b) **(2p.)** Aalto-maraton on täydessä vauhdissa. Kilpailijoiden maaliintuloaikoja mallinnetaan riippumattomina eksponentiaalisesti jakautuneina satunnaislukuina T_j tahdeilla $1/j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Tr. Outolempi Matematiikan ja Systeemianalyysin laitokselta osallistuu kilpailuun suoritusajalla T_3. Oletetaan, että maratonissa on kaikkiaan 5 osallistujaa. Millä todennäköisyydellä Tr. Outolempi voittaa maratonkilpailun?

3 Kuvitteellinen litulaji lisääntyy seuraavan populaatiomallin mukaisesti. Elinkaarensa aikana jokainen yksilö munii kaksi munaa. Jokainen muna kuoriutuu todennäköisyydellä $2/3$ toisistaan riippumattomasti. Kuoriutumattomat munat eivät voi kuoriutua enää tulevaisuudessa. Ensimmäinen lintusukupolvi koostuu kolmesta yksilöstä.

Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin.

(a) **(1p.)** Mallinna populaatiomalli haarautumisprosessina $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$. Kirjoita todennäköisyydet generoiva funktio ϕ yksilön jälkeläisten lukumäärän jakaumalle.

(b) **(1p.)** Millä todennäköisyydellä kolmannessa sukupolvessa ei ole yhtään lintua?

(c) **(1p.)** Mikä on lintujen lukumäärän odotusarvo $\mathbb{E}[X_t]$ sukupolvella t?

(d) **(1p.)** Millä todennäköisyydellä lintulaji kuolee sukupuuttoon?

(e) **(2p.)** Löydä ne luvut $\lambda \in \mathbb{R}$, joilla prosessi $(M_t)_{t \in \mathbb{N}} = (\lambda^{-t} X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ on martingaali.

4 Jorvin teho-osastolla on neljä vuodetta. Uusia tehohoitoa vaativia potilaita saapuu eksponentiaalisesti jakautuneina satunnaisaikoina keskimääräisellä tahdilla 0.4 päivässä. Kaikkien vuoteiden ollessa varattuja saapuva potilas ohjataan toiseen sairaalaan. Potilas viettää sairaalassa eksponentiaalisesti jakautuneen satunnaisajan, keskimäärin 5 päivää. Sairaala on auki kaiken aikaa, ja potilaiden saapumis- ja poistumisajat ovat toisistaan riippumattomia.

Perustele vastauksesi alla oleviin kysymyksiin.

(a) **(2p.)** Olkoon X_t varattujen vuoteiden lukumäärä ajanhetkellä $t \geq 0$. Perustele lyhyesti, miksi $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ on jatkuva-aikainen Markov-ketju. Määritä sen tila-avaruus, piirrä siirtymädiagrammi, ja kirjoita sen generoiva matriisi.

(b) **(2p.)** Millä todennäköisyydellä statistisessa tasapainotilassa teho-osastolla on vuode vapaana potilaan saapuessa?

(c) **(2p.)** Kiireisenä maanantaiaamuna sairaalan johtaja huomaa kaikkien vuoteiden olevan varattu ja päättää, ettei uusia potilaita vastaanoteta ennen kuin kaksi vuodetta vapautuu. Mikä on odotusaika, kunnes tämä tapahtuu?