

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)

Kurssitentti 20.6.2023 klo 16.00-19.00

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: “viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai “pelkät kuusi koetehtävää”.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita.

1. Laske raja-arvot

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2)}{n}.$$

Molemmat kohdat (3p).

2. Tarkastellaan sarjoja.

(a) Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n}$? (2p)

(b) Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$? (2p)

(c) Anna esimerkki sarjasta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jolle $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mutta sarja hajaantuu. (2p)

3. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} x^n.$$

(a) Määritä sarjan suppenemissäde R . (2p)

(b) Suppeneeko sarja arvolla $x = R$ tai arvolla $x = -R$? (2p)

(c) Millä reaali välillä sarja suppenee? (2p)

4. Esitä funktion $f(x) = \sin(x^2)$ Taylorin sarja kehityskeskukseksi $a = 0$. (3p) Määritä derivaattojen arvot $f'(0)$, $f'''(0)$ ja $f^{(10)}(0)$. (3p)

5. Laske integraalit

(a) $\int x \cos(x) dx$ (3p)

(b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$ (3p)

KÄÄNNÄ

6. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt

(a) $y' = -y \tan(x)$ (3p)

(b) $y'' + 2y' - 3y = 0$ (3p)

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

Eräitä kaavoja:

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ suppenee, jos ja vain jos $p > 1$.

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$