

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

**MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)**

**Kurssitentti 20.6.2023 klo 16.00-19.00**

**Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.**

**Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.**

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita.

1. Laske raja-arvot

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2)}{n}.$$

Molemmat kohdat (3p).

2. Tarkastellaan sarjoja.

(a) Suppeneeko sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n}$ ? (2p)

(b) Suppeneeko sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ ? (2p)

(c) Anna esimerkki sarjasta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , jolle  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , mutta sarja hajaantuu. (2p)

3. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} x^n.$$

(a) Määritä sarjan suppenemissäde  $R$ . (2p)

(b) Suppeneeko sarja arvolla  $x = R$  tai arvolla  $x = -R$ ? (2p)

(c) Millä reaalivälillä sarja suppenee? (2p)

4. Esitä funktion  $f(x) = \sin(x^2)$  Taylorin sarja kehityskeskuksella  $a = 0$ . (3p) Määritä derivaattojen arvot  $f'(0)$ ,  $f'''(0)$  ja  $f^{(10)}(0)$ . (3p)

5. Laske integraalit

(a)  $\int x \cos(x) dx$  (3p)

(b)  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$  (3p)

KÄÄNNÄ

6. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt

(a)  $y' = -y \tan(x)$  (3p)

(b)  $y'' + 2y' - 3y = 0$  (3p)

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  suppenee, jos ja vain jos  $p > 1$ .

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$