MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 mallivastaukset

Date of exam: 21.10.2020 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.

2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.

3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

a) Olkoon $c > 0$ vakio. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{cn + 2\sqrt{n}}{c^2 - n\sqrt{c}}.$$

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

Problem 1 solution

a) Olkoon $c > 0$ vakio. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{cn + 2\sqrt{n}}{c^2 - n\sqrt{c}}.$$

Käytetään raja-arvojen laskusääntöjä ja jaetaan molemmat puolet n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c + \frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{c^2}{n} - \sqrt{c}}$$

Kun $n \to \infty$, termi $\frac{c^2}{n}$ häviää:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c + \frac{2}{\sqrt{n}}}{-\sqrt{c}}$$

Nyt voimme ratkaista raja-arvon:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{-\sqrt{c}} = -\sqrt{c}$$

Joten raja-arvo on $-\sqrt{c}$.

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

Huomaamme, että sekä ylä- että alaosassa on tekijä $(x - 1)$. Käytetään tekijöihin jakamista:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{((x^2+1)(x-1))(x+1)}$$

Kun $x \neq 1$, voimme supistaa tekijät $(x-1)$:

$$\frac{x-2}{(x^2+1)(x+1)}$$

Nyt voimme laskea raja-arvon, kun $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1-2}{(1^2+1)(1+1)} = \frac{-1}{(2)(2)} = -\frac{1}{4}$$

Joten raja-arvo on $-\frac{1}{4}$.

Problem 2

a) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}?$$

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2k^3 + (-1)^k \sqrt{k}}?$$

c) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} x^k$$

suppenee?

Problem 2 solution

a) Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$$

Käytetään vertailuperiaatetta ja vertaillaan sarjaa suurempaan sarjaan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Tämä sarja on harmoninen sarja, joka on tunnetusti divergentti. Koska alkuperäinen sarja on suurempi kuin divergentti sarja, myös alkuperäinen sarja on divergentti.

b) Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2k^3 + (-1)^k \sqrt{k}}$$

Käytetään vertailuperiaatetta ja vertaillaan sarjaa pienempään sarjaan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2k^3 + k^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{5/2}}$$

Tämä sarja on p-arvosarja, jossa $p = \frac{5}{2} > 1$. P-arvosarja suppenee, kun $p > 1$. Koska alkuperäinen sarja on pienempi kuin suppeneva sarja, myös alkuperäinen sarja suppenee.

c) Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} x^k$$

Tämä on potenssisarja. Potenssisarjan suppenevuus määräytyy sen säteen R perusteella:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}}{k+1} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3k}{k+1}$$

$$R = 3$$

Potenssisarja suppenee, kun $|x| < R$, eli kun $|x| < 3$. Sarja suppenee muuttujan x arvoilla $-3 < x < 3$.

Problem 3

Määritellään funktio $f : [-1, \infty[\to [-1/e, \infty[$ asettamalla $f(x) = xe^x$, kun $x \geq -1$.
a) Osoita että funktio f on aidosti kasvava.
b) Merkitään $W(x) = f^{-1}(x)$. Laske derivaatta $W'(0)$.
c) Laske toinen derivaatta $W''(0)$ derivoimalla kaksi kertaa yhtälö

$$W(x)e^{W(x)} = x$$

sijoittamalla $x = 0$ ja ratkaisemalla kysytty lauseke.
Varoitus + lisätieto: Käänteisfunktiota $W(x)$ ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla. Sen nimi on Lambertin W-funktio.

Problem 3 solution

a) Osoita, että funktio $f(x) = xe^x$ on aidosti kasvava, kun $x \geq -1$.

Derivoimalla funktio $f(x)$ saadaan sen derivaatta $f'(x)$:

$$f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

Koska eksponenttifunktio e^x on aina positiivinen, merkki $f'(x)$ määräytyy lausekkeen $(1 + x)$ perusteella. Kun $x \geq -1$, lauseke $(1 + x)$ on positiivinen tai nolla. Tällöin $f'(x) \geq 0$, mikä tarkoittaa, että funktio $f(x)$ on kasvava. Koska $f'(x) > 0$ kun $x > -1$, funktio $f(x)$ on aidosti kasvava.

b) Merkitään $W(x) = f^{-1}(x)$. Laske derivaatta $W'(0)$.

Käytetään käänteisfunktion derivaatan kaavaa:

$$W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}$$

Koska $W(0) = f^{-1}(0)$ ja $f(0) = 0$, saadaan $W(0) = 0$. Sijoitetaan tämä kaavaan:

$$W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0(1 + 0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Joten derivaatta $W'(0) = 1$.

c) Laske toinen derivaatta $W''(0)$ derivoimalla kaksi kertaa yhtälö $W(x)e^{W(x)} = x$, sijoittamalla $x = 0$ ja ratkaisemalla kysytty lauseke.

Derivoidaan yhtälö $W(x)e^{W(x)} = x$ molemmin puolin:

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)W'(x)e^{W(x)} = 1$$

$$(W'(x) + W(x)W'(x))e^{W(x)} = 1$$

Derivoidaan uudelleen:

$$(W''(x) + W'(x) + W'(x) + W(x)W''(x))e^{W(x)} = 0$$

$$(W''(x) + 2W'(x) + W(x)W''(x))e^{W(x)} = 0$$

Koska $e^{W(x)}$ ei koskaan ole nolla, voimme jakaa molemmat puolet sillä:

$$W''(x) + 2W'(x) + W(x)W''(x) = 0$$

Sijoitetaan $x = 0$:

$$W''(0) + 2W'(0) + W(0)W''(0) = 0$$

Olemme jo laskeneet, että $W'(0) = 1$ ja $W(0) = 0$. Sijoitetaan nämä arvot yhtälöön:

$$W''(0) + 2(1) + 0 \cdot W''(0) = 0$$

$$W''(0) + 2 = 0$$

Ratkaistaan $W''(0)$:

$$W''(0) = -2$$

Joten toinen derivaatta $W''(0) = -2$.

Problem 4

Laske integraali

$$\int_0^1 \left(x^3 + x\right) \ln\left(x^2 + 1\right) dx$$

sijoittamalla aluksi $u = x^2 + 1$.

Problem 4 solution

Käytetään sijoitusta $u = x^2 + 1$, jolloin $du = 2xdx$:

$$\int_0^1 \left(x^3 + x\right) \ln\left(x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u\ln(u)du$$

Integroidaan osittain, jolloin $f(u) = u$ ja $g'(u) = \ln(u)$:

$$f(u) = u \Rightarrow f'(u) = 1$$

$$g'(u) = \ln(u) \Rightarrow g(u) = u\ln(u) - u$$

Osittaisintegroinnin kaavan mukaan:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u\ln(u)du = \frac{1}{2}\left[u(u\ln(u) - u)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 (u\ln(u) - u)du$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2(2\ln(2) - 2) - 1(1\ln(1) - 1))\right] - \frac{1}{2}\int_1^2 u\ln(u)du + \frac{1}{2}\int_1^2 udu$$

Nyt meillä on yhtälö, jossa esiintyy integraali $\int_1^2 u\ln(u)du$. Ratkaistaan se:

$$\int_1^2 u\ln(u)du = (2\ln(2) - 2) + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4}u^2\right]_1^2$$

$$\int_1^2 u\ln(u)du = (2\ln(2) - 2) + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4}u^2\right]_1^2$$

$$= 2\ln(2) - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(4 - 1) = 2\ln(2) - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$$

Sijoitetaan tämä takaisin alkuperäiseen integraaliin:

$$\int_0^1 \left(x^3 + x\right) \ln\left(x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{2}\left(2\ln(2) - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)$$
$$= \ln(2) - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}$$

Joten integraalin arvo on $\ln(2) - \frac{3}{8}$.

Problem 5

Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Etsi differentiaaliyhtälön

$$xy' + ny = 1, \quad x > 0,$$

se ratkaisu $y = y(x)$, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.

Problem 5 solution

Tämä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Voimme ratkaista sen käyttämällä integroivaa tekijää. Integroiva tekijä on

$$\mu(x) = e^{\int \frac{n}{x} dx} = e^{n \ln x} = x^n$$

Kerromme differentiaaliyhtälön normaalimuodon molemmat puolet integroivalla tekijällä:

$$x^n(y' + \frac{n}{x}y) = x^{n-1}$$

$$x^n y' + nx^{n-1}y = x^{n-1}$$

Nyt vasen puoli on derivaatan tulo:

$$\frac{d}{dx}(x^n y) = x^{n-1}$$

Integroimalla molemmat puolet saadaan:

$$\int \frac{d}{dx}(x^n y)dx = \int x^{n-1}dx$$

$$x^n y = \frac{x^n}{n} + C$$

Ratkaistaan $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{C}{x^n}$$

Käytetään alkuehtoa $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{C}{1^n}$$

Ratkaistaan vakio C:

$$C = 1 - \frac{1}{n}$$

Nyt saamme ratkaisun differentiaaliyhtälölle:

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{x^n}$$

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{nx^n}$$

Tämä on differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.

Problem 6

Funktiot $y(x) = e^{3x}$ ja $y(x) = e^{-5x}$ toteuttavat saman differentiaaliyhtälön

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

a) Määritä kertoimet α ja β.
b) Muodosta differentiaaliyhtälölle (1) sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 16$.

Problem 6 solution

a)

Koska funktiot $y(x) = e^{3x}$ ja $y(x) = e^{-5x}$ toteuttavat saman differentiaaliyhtälön, voimme laskea niiden derivaatat ja sijoittaa ne differentiaaliyhtälöön.

Ensimmäinen funktio: $y(x) = e^{3x}$

$$y'(x) = 3e^{3x}$$

$$y''(x) = 9e^{3x}$$

Sijoitetaan nämä differentiaaliyhtälöön:

$$9e^{3x} + \alpha(3e^{3x}) + \beta(e^{3x}) = 0$$

Toinen funktio: $y(x) = e^{-5x}$

$$y'(x) = -5e^{-5x}$$

$$y''(x) = 25e^{-5x}$$

Sijoitetaan nämä differentiaaliyhtälöön:

$$25e^{-5x} + \alpha(-5e^{-5x}) + \beta(e^{-5x}) = 0$$

Koska molemmat funktiot toteuttavat saman differentiaaliyhtälön, voimme asettaa nämä yhtälöt yhtä suuriksi:

$$9e^{3x} + \alpha(3e^{3x}) + \beta(e^{3x}) = 25e^{-5x} + \alpha(-5e^{-5x}) + \beta(e^{-5x})$$

Koska tämä yhtälö pätee kaikilla x, voimme jakaa molemmat puolet e^{3x} ja e^{-5x}:

$$9 + 3\alpha + \beta = 25 - 5\alpha + \beta$$

Nyt meillä on yhtälöpari:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = -9 \\ -5\alpha + \beta = -25 \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan $\alpha = 2$ ja $\beta = -15$.

Joten kertoimet ovat $\alpha = 2$ ja $\beta = -15$.

b)
Muodosta differentiaaliyhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 16$.

Nyt tiedämme, että differentiaaliyhtälö on muotoa:

$$y'' + 2y' - 15y = 0$$

Ratkaisu on muotoa $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$, missä C_1 ja C_2 ovat vakioita. Käytetään alkuehtoja määrittämään vakiot.

Kun $x = 0$, $y(0) = 0$:

$$0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$0 = C_1 + C_2$$

Derivaatta on $y'(x) = 3C_1 e^{3x} - 5C_2 e^{-5x}$. Käytetään toista alkuehtoa, $y'(0) = 16$:

$$16 = 3C_1 e^0 - 5C_2 e^0$$

$$16 = 3C_1 - 5C_2$$

Nyt meillä on yhtälöpari:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 - 5C_2 = 16 \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan $C_1 = 2$ ja $C_2 = -2$.

Joten differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 16$, on:

$$y(x) = 2e^{3x} - 2e^{-5x}$$