MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 mallivastaukset

Date of exam: 27.10.2021 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.
2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.
3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

1. a) Lukujonon (b_n) termeille on voimassa

$$\frac{3^{2n+1}}{9^n+1} \leq b_n \leq \frac{9n^2+5n}{3n^2+1}$$

kaikilla $n \geq 1$. Suppeneeko jono (b_n) ?
Huom: Oletetaan tunnetuksi, että yläraja on suurempi kuin alaraja kaikilla $n \geq 1$; tätä ei tarvitse perustella erikseen.
b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(\pi \sin x)}{2x-\pi}$$

esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla.

Problem 1 solution

1. a) Tarkastellaan lukujonoa (b_n), jonka termeille on voimassa

$$\frac{3^{2n+1}}{9^n+1} \leq b_n \leq \frac{9n^2+5n}{3n^2+1}$$

kaikilla $n \geq 1$. Haluamme selvittää, suppeneeko jono (b_n).

Koska yläraja on suurempi kuin alaraja kaikilla $n \geq 1$, voimme tarkastella ala- ja ylärajojen raja-arvoja erikseen. Jos molemmat raja-arvot ovat samat, jono suppenee.

Alaraja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}}{9^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n}{9^n+1}$$

Kun n kasvaa suureksi, termi 9^n dominoi termiä 1, joten voimme kirjoittaa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n}{9^n+1} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n}{9^n} = 3$$

Yläraja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+5n}{3n^2+1}$$

Kun n kasvaa suureksi, termi n^2 dominoi muita termejä, joten voimme kirjoittaa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+5n}{3n^2+1} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2}{3n^2} = 3$$

Koska sekä ala- että ylärajan raja-arvot ovat 3, jono (b_n) suppenee, ja sen raja-arvo on 3.

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(\pi \sin x)}{2x-\pi}$$

Käytetään L'Hospitalin sääntöä. Derivoidaan molemmat funktiot x:n suhteen:

$$\frac{d}{dx}\sin(\pi \sin x) = \pi \cos(\pi \sin x) \cdot \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(2x-\pi) = 2$$

Nyt voimme soveltaa L'Hospitalin sääntöä:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(\pi \sin x)}{2x-\pi} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\pi \cos(\pi \sin x) \cdot \cos x}{2}$$

Kun $x \to \pi/2$, saadaan:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\pi \cos(\pi \sin x) \cdot \cos x}{2} = \frac{\pi \cos(\pi \sin(\pi/2)) \cdot \cos(\pi/2)}{2} = \frac{\pi \cos(\pi) \cdot 0}{2} = 0$$

Joten raja-arvo on 0.

Problem 2

2. a) Määritä (geometrisen?) sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{4^{k+5}}$$

summa.

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}?$$

c) Olkoon $s_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$, kun $k \in \mathbf{N}$. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k}?$$

Problem 2 solution

2. a) Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{4^{k+5}}$$

summa.

Sarja voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{4^{k+5}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{(2^2)^{k+5}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{2^{2(k+5)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+7}}$$

Tämä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on $a = \frac{1}{2^7}$ ja suhde $r = \frac{1}{2}$. Koska $|r| < 1$, sarja suppenee, ja sen summa voidaan laskea kaavalla:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2^7}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^7} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Joten sarjan summa on $\frac{1}{64}$.

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}?$$

Tämä on positiiviterminen sarja, joten voimme käyttää suhdekriteeriä selvittääksemme, suppeneeko se. Lasketaan suhde $R = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{5^{k+1}}}{\frac{k}{5^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{5^k}{5^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Koska $R < 1$, sarja suppenee.

c) Olkoon $s_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$, kun $k \in \mathbf{N}$. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k}?$$

Tiedämme, että $s_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Tarkastellaan sarjaa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$$

Voimme kirjoittaa sarjan osittaissummien avulla:

$$\frac{2}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

Ratkaistaan A ja B:

$$2 = A(k+1) + Bk \Rightarrow A = 2 - B(k+1)$$

Kun $k = 1$, saadaan:

$$2 = A(2) + B \Rightarrow A = 1 - \frac{B}{2}$$

Kun $k = 2$, saadaan:

$$2 = A(3) + 2B \Rightarrow A = \frac{2}{3} - \frac{B}{3}$$

Ratkaistaan yhtälöpari:

$$1 - \frac{B}{2} = \frac{2}{3} - \frac{B}{3} \Rightarrow B = 2$$

$$A = 1 - \frac{B}{2} = 1 - 1 = 0$$

Nyt voimme kirjoittaa sarjan osittaissummien avulla:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{0}{k} + \frac{2}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k+1}$$

Tämä on harmoninen sarja, joka ei suppene. Siis alkuperäinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k}$ ei suppene.

Problem 3

3. a) Perustele: Yhtälö

$$f(y) = 2y + \sin y = x$$

määrää yksikäsitteisellä tavalla $y : n$ muuttujan x funktiona, eli muodossa $y = g(x)$.
b) Laske a-kohdan funktion $g(x)$ derivaatta $g'(2\pi)$.

Problem 3 solution

3. a) Tarkastellaan yhtälöä

$$f(y) = 2y + \sin y = x$$

Haluamme perustella, että yhtälö määrää yksikäsitteisellä tavalla $y : n$ muuttujan x funktiona, eli muodossa $y = g(x)$.

Tarkastellaan funktion $f(y)$ derivaattaa y:n suhteen:

$$f'(y) = \frac{d}{dy}(2y + \sin y) = 2 + \cos y$$

Koska $-1 \leq \cos y \leq 1$, niin $1 \leq f'(y) \leq 3$. Tämä tarkoittaa, että $f'(y) > 0$ kaikilla y, eli funktio $f(y)$ on koko ajan kasvava. Koska $f(y)$ on kasvava, se on yksikäsitteinen, ja voimme kirjoittaa y funktiona x:stä muodossa $y = g(x)$.

b) Laske a-kohdan funktion $g(x)$ derivaatta $g'(2\pi)$.

Koska $f(y) = x$, niin $g(x) = f^{-1}(x)$. Käytämme derivaatan ketjusääntöä laskeaksemme $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Nyt haluamme laskea $g'(2\pi)$:

$$g'(2\pi) = \frac{1}{f'(g(2\pi))}$$

Koska $f(y) = 2y + \sin y = x$, niin $f(2\pi) = 2(2\pi) + \sin(2\pi) = 4\pi$. Tämä tarkoittaa, että $g(2\pi) = 2\pi$.

Nyt voimme laskea $f'(g(2\pi)) = f'(2\pi)$:

$$f'(2\pi) = 2 + \cos(2\pi) = 2 + 1 = 3$$

Lopuksi saamme:

$$g'(2\pi) = \frac{1}{f'(g(2\pi))} = \frac{1}{3}$$

Joten funktion $g(x)$ derivaatta $g'(2\pi)$ on $\frac{1}{3}$.

Problem 4

4. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx$$

esimerkiksi osittaisintegroinnin avulla.
Vihje: Toinen funktio on vakio 1 , t.s. $(\ln x)^2 = 1 \cdot (\ln x)^2$. Harjoitustehtävän 4b/5A aputulosta voi käyttää ilman perusteluja.

Problem 4 solution

Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx$$

osittaisintegroinnin avulla.

Käytetään osittaisintegrointia funktioille $u = (\ln x)^2$ ja $dv = dx$. Tällöin saadaan $du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx$ ja $v = x$. Osittaisintegrointikaava on:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Sovellamme kaavaa:

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

Koska $\ln 1 = 0$ ja $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$, saadaan:

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = 0 - \int_0^1 2\ln x\, dx$$

Nyt voimme käyttää harjoitustehtävän 4b/5A aputulosta, joka kertoo, että $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$. Tällöin saadaan:

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = -2\int_0^1 \ln x\, dx = -2(-1) = 2$$

Joten epäoleellisen integraalin arvo on 2.

Problem 5

a) Eräs henkilö on opetellut ulkoa 10000 ensimmäistä desimaalia luvusta π. Hetkellä $t = 0$ (kuukautta) kiinnostus aiheeseen lopahtaa, jolloin muistissa olevien desimaalien lukumäärä $y = y(t)$ alkaa vähentyä differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun $y(0) = 10000$ ja $y(12) = 2500$.

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = -y^2$ alkuehdolla $y(0) = 10$.

Problem 5 solution

5. a) Meillä on differentiaaliyhtälö $y'(t) = -ky(t)$ ja alkuarvot $y(0) = 10000$ ja $y(12) = 2500$. Haluamme määrittää vakion k tarkan arvon.

Tämä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on muotoa:

$$y(t) = y(0)e^{-kt}$$

Koska $y(0) = 10000$, saamme:

$$y(t) = 10000e^{-kt}$$

Käytämme toista alkuarvoa $y(12) = 2500$:

$$2500 = 10000e^{-12k}$$

Ratkaistaan k:

$$\frac{1}{4} = e^{-12k} \Rightarrow \ln\frac{1}{4} = -12k \Rightarrow k = -\frac{1}{12}\ln\frac{1}{4} = \frac{1}{6}\ln 4$$

Joten vakion k tarkka arvo on $k = \frac{1}{6}\ln 4$.

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'(t) = -y(t)^2$ alkuehdolla $y(0) = 10$.

Tämä on ensimmäisen kertaluvun erillinen differentiaaliyhtälö. Voimme kirjoittaa sen muodossa:

$$\frac{dy}{dt} = -y^2$$

Erotetaan muuttujat:

$$\frac{dy}{y^2} = -dt$$

Integroidaan molemmat puolet:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -dt$$

$$-\frac{1}{y} = -t + C$$

Ratkaistaan $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{t - C}$$

Käytämme alkuehtoa $y(0) = 10$:

$$10 = \frac{1}{-C} \Rightarrow C = -\frac{1}{10}$$

Joten differentiaaliyhtälön ratkaisu on:

$$y(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{10}}$$

Problem 6

6. a) Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' - 8y' + 12y = 36x + 24$$

yleinen ratkaisu.
b) Erään lineaarisen ja homogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön perusratkaisut ovat $y_1(x) = x$ ja $y_2(x) = \cos x$. Määritä alkuarvotehtävän $y(0) = 100, y'(0) = 200$ ratkaisu.

Problem 6 solution

a) Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' - 8y' + 12y = 36x + 24$$

yleinen ratkaisu.

Ratkaisemme ensin homogeenisen yhtälön $y'' - 8y' + 12y = 0$.

Oletetaan, että ratkaisu on muotoa $y(x) = e^{rx}$. Sijoitetaan tämä differentiaaliyhtälöön:

$$r^2e^{rx} - 8re^{rx} + 12e^{rx} = 0$$

Koska $e^{rx} \neq 0$, voimme jakaa sen molemmilla puolilla:

$$r^2 - 8r + 12 = 0$$

Tämä on toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat $r_1 = 6$ ja $r_2 = 2$. Joten homogeenisen
differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on:

$$y_h(x) = C_1e^{6x} + C_2e^{2x}$$

Nyt ratkaisemme epähomogeenisen differentiaaliyhtälön erityisratkaisun. Koska oikea puoli on polynomifunktio, oletetaan, että erityisratkaisu on muotoa $y_p(x) = Ax+B$, missä A ja B ovat vakioita. Lasketaan ensimmäinen ja toinen derivaatta:

$$y_p'(x) = A$$

$$y_p''(x) = 0$$

Sijoitetaan nämä differentiaaliyhtälöön:

$$0 - 8A + 12(Ax + B) = 36x + 24$$

Vertaamalla x:n kertoimia ja vakiotermejä saadaan:

$$12A = 36 \Rightarrow A = 3$$

$$-8A + 12B = 24 \Rightarrow -24 + 12B = 24 \Rightarrow B = 4$$

Joten erityisratkaisu on $y_p(x) = 3x + 4$.

Lopuksi yhdistämme homogeenisen ja epähomogeenisen ratkaisut:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x} + 3x + 4$$

Joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x} + 3x + 4$.

b) Erään lineaarisen ja homogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön perusratkaisut ovat $y_1(x) = x$ ja $y_2(x) = \cos x$. Määritä alkuarvotehtävän $y(0) = 100, y'(0) = 200$ ratkaisu.

Koska perusratkaisut ovat $y_1(x) = x$ ja $y_2(x) = \cos x$, niin yleinen ratkaisu on:

$$y(x) = C_1 x + C_2 \cos x$$

Lasketaan derivaatta:

$$y'(x) = C_1 - C_2 \sin x$$

Käytämme alkuarvoja $y(0) = 100$ ja $y'(0) = 200$:

$$100 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cos 0 \Rightarrow C_2 = 100$$

$$200 = C_1 - C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 200$$

Joten alkuarvotehtävän ratkaisu on:

$$y(x) = 200x + 100 \cos x$$