MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 mallivastaukset

Date of exam: 10.12.2020 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.
2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.
3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

1. a) Määritä sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k}$$

summa.

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3}?$$

c) Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{9^k} x^k$$

suppenemissäde.

Problem 1 solution

1. a) Määritä sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k}$$

summa.

Tämä on geometrinen sarja, jossa ensimmäinen termi $a = \frac{3^{1+1}}{5^1} = \frac{9}{5}$ ja suhde $r = \frac{3}{5}$. Geometrisen sarjan summa on

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{2}$$

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3}?$$

Käytetään vertailuperiaatetta. Huomataan, että

$$\frac{k^2}{k^2+3} < \frac{k^2}{k^2} = 1$$

ja

$$\frac{k^2}{k^2+3} > \frac{k^2}{k^2+k^2} = \frac{1}{2}$$

Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3}$ on positiiviterminen ja sen termit ovat välillä $\frac{1}{2} < \frac{k^2}{k^2+3} < 1$, voimme verrata sitä harmoniseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, joka on tunnetusti divergentti. Tällöin myös alkuperäinen sarja on divergentti.

c) Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{9^k} x^k$$

suppenemissäde.

Käytetään suhderajaa määrittämään suppenemissäde R:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{k^2}{9^k}}{\frac{(k+1)^2}{9^{k+1}}} \right|$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^2 \cdot 9^{k+1}}{(k+1)^2 \cdot 9^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{9k^2}{(k+1)^2} \right|$$

$$R = 9 \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right| = 9 \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} \right| = 9$$

Joten potenssisarjan suppenemissäde on $R = 9$.

Problem 2

Määritä raja-arvot

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+4n^2+n-6}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^3+4x^2+x-6}$.

Problem 2 solution

2. Määritä raja-arvot

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+4n^2+n-6}$

Jaa sekä osoittaja että nimittäjä suurimman potenssin mukaan, tässä tapauksessa n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+4n^2+n-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{6}{n^3}}$$

Kun $n \to \infty$, termit $\frac{1}{n^2}$, $\frac{4}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ ja $\frac{6}{n^3}$ kaikki lähestyvät nollaa. Joten raja-arvo on:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{6}{n^3}} = \frac{1-0}{1+0+0-0} = \frac{1}{1} = 1$$

Käytetään L'Hôpitalin sääntöä tehtävän osassa b.

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^3+4x^2+x-6}$

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän derivaatat:

$$\frac{d}{dx}(x^3-x) = 3x^2-1$$

$$\frac{d}{dx}(x^3+4x^2+x-6) = 3x^2+8x+1$$

Koska osoittajan ja nimittäjän derivaatat ovat jatkuvia lähellä $x=1$, voimme soveltaa L'Hôpitalin sääntöä:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-1}{3x^2+8x+1}$$

Nyt voimme sijoittaa $x=1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 1}{3x^2 + 8x + 1} = \frac{3(1)^2 - 1}{3(1)^2 + 8(1) + 1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Joten raja-arvo on $\frac{1}{6}$.

Problem 3

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + \sin 2x$.
a) Muodosta funktion f kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.
Huom: Maclaurin = Taylor tapauksessa $x_0 = 0$.
b) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.
c) Määritä käänteisfunktion derivaatta

$$\left(f^{-1}\right)'(3\pi).$$

Problem 3 solution

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + \sin 2x$.

a) Muodosta funktion f kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.

Maclaurin-polynomi on Taylorin polynomi, kun $x_0 = 0$. Lasketaan funktion $f(x)$ derivaatat ja arvot $x = 0$ kohdassa:

$$f(x) = 3x + \sin 2x \Rightarrow f(0) = 3(0) + \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = 3 + 2\cos 2x \Rightarrow f'(0) = 3 + 2\cos(0) = 5$$

$$f''(x) = -4\sin 2x \Rightarrow f''(0) = -4\sin(0) = 0$$

$$f'''(x) = -8\cos 2x \Rightarrow f'''(0) = -8\cos(0) = -8$$

Kolmannen asteen Maclaurin-polynomi on:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 0 + 5x + \frac{0x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} = 5x - \frac{4}{3}x^3$$

b) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.

Tarkastellaan funktion $f(x)$ derivaattaa:

$$f'(x) = 3 + 2\cos 2x$$

Koska $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, niin $1 \leq 2\cos 2x \leq 2$. Tämä tarkoittaa, että $4 \leq f'(x) \leq 5$. Koska $f'(x) > 0$ kaikilla x, funktio $f(x)$ on koko ajan kasvava.

c) Määritä käänteisfunktion derivaatta

$$\left(f^{-1}\right)'(3\pi).$$

Koska $f(x)$ on aidosti kasvava, sillä on käänteisfunktio $f^{-1}(x)$. Käytämme derivaatan ketjusääntöä laskeaksemme käänteisfunktion derivaatan:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Nyt haluamme laskea käänteisfunktion derivaatan arvon $x = 3\pi$:

$$\left(f^{-1}\right)'(3\pi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3\pi))}$$

Koska $f(x) = 3x + \sin 2x$, niin $f(\pi) = 3\pi + \sin(2\pi) = 3\pi$. Tämä tarkoittaa, että $f^{-1}(3\pi) = \pi$.

Nyt voimme laskea $f'(\pi)$:

$$f'(\pi) = 3 + 2\cos(2\pi) = 3 + 2 = 5$$

Lopuksi saamme:

$$\left(f^{-1}\right)'(3\pi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3\pi))} = \frac{1}{5}$$

Joten käänteisfunktion derivaatta $\left(f^{-1}\right)'(3\pi)$ on $\frac{1}{5}$.

Problem 4

4. a) Määritä osamurtohajotelman

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

kertoimet A ja B.
b) Laske integraali

$$\int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^x} dx$$

sijoittamalla ensin $x = \ln t$.

Problem 4 solution

4. a) Määritä osamurtohajotelman

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

kertoimet A ja B.

Kertoimien löytämiseksi yhdistämme murtolausekkeet:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}$$

Nyt asetamme nimittäjät yhtä suuriksi:

$$1 = A(1+t) + Bt$$

Ratkaisemme kertoimet A ja B asettamalla $t = 0$ ja $t = -1$:

Kun $t = 0$:

$$1 = A(1+0) + B(0) \Rightarrow A = 1$$

Kun $t = -1$:

$$1 = A(1-1) + B(-1) \Rightarrow B = -1$$

Joten osamurtohajotelma on:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

b) Laske integraali

$$\int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^x} dx$$

sijoittamalla ensin $x = \ln t$.

Kun $x = \ln t$, niin $t = e^x$. Derivaatta on $dt = e^x dx$. Integraalin rajat muuttuvat: kun $x = 0$, $t = e^0 = 1$; kun $x = \ln 3$, $t = e^{\ln 3} = 3$.

Nyt voimme kirjoittaa integraalin uudessa muodossa:

$$\int_1^3 \frac{1}{1+t} dt$$

Käytämme osamurtohajotelmaa:

$$\int_1^3 \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_1^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

Integroimme kumpikin termi erikseen:

$$\int_1^3 \frac{1}{t} dt - \int_1^3 \frac{1}{1+t} dt = [\ln |t|]_1^3 - [\ln |1+t|]_1^3$$

$$= (\ln 3 - \ln 1) - (\ln 4 - \ln 2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

Joten integraalin arvo on $\ln \frac{3}{2}$.

Problem 5

a) Eräs henkilö on opetellut ulkoa 12000 ensimmäistä desimaalia luvusta π. Hetkellä $t = 0$ (kuukautta) kiinnostus aiheeseen lopahtaa, jolloin muistissa olevien desimaalien lukumäärä $y = y(t)$ alkaa vähentyä differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun $y(0) = 12000$ ja $y(12) = 4000$.

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = -y^2$ alkuehdolla $y(0) = 10$.

Problem 5 solution

5. a) Eräs henkilö on opetellut ulkoa 12000 ensimmäistä desimaalia luvusta π. Hetkellä $t = 0$ (kuukautta) kiinnostus aiheeseen lopahtaa, jolloin muistissa olevien desimaalien lukumäärä $y = y(t)$ alkaa vähentyä differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun $y(0) = 12000$ ja $y(12) = 4000$.

Tämä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö. Ratkaisu on muotoa:

$$y(t) = Ce^{-kt}$$

Käytämme alkuehtoa $y(0) = 12000$:

$$12000 = Ce^{-k(0)} \Rightarrow C = 12000$$

Nyt meillä on ratkaisu:

$$y(t) = 12000e^{-kt}$$

Käytämme toista ehtoa $y(12) = 4000$:

$$4000 = 12000e^{-k(12)} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-12k}$$

Otamme molemmilta puolilta luonnollisen logaritmin:

$$\ln\frac{1}{3} = -12k$$

Ratkaistaan k:

$$k = -\frac{1}{12}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{12}\ln 3$$

Joten vakion k tarkka arvo on $k = \frac{1}{12}\ln 3$.

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = -y^2$ alkuehdolla $y(0) = 10$.

Tämä on ensimmäisen kertaluvun erillinen differentiaaliyhtälö. Voimme kirjoittaa sen muodossa:

$$\frac{dy}{dt} = -y^2$$

Erotetaan muuttujat:

$$\frac{dy}{y^2} = -dt$$

Integroidaan molemmat puolet:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int dt$$

$$-\frac{1}{y} = -t + C$$

Ratkaistaan y:

$$y = \frac{1}{t - C}$$

Käytämme alkuehtoa $y(0) = 10$:

$$10 = \frac{1}{0 - C} \Rightarrow C = -\frac{1}{10}$$

Nyt meillä on ratkaisu:

$$y(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{10}}$$

Problem 6

Funktiot $y(x) = x^2$ ja $y(x) = x^3$ toteuttavat saman differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

a) Sijoita annetut ratkaisut differentiaaliyhtälöön (1) ja määritä sitten kertoimet α ja β.
b) Kiinnitetään vakioille α ja β kohdassa a) saadut lukuarvot. Muodosta differentiaaliyhtälölle (1) sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(1) = 2$ ja $y'(1) = 0$.

Problem 6 solution

6. Funktiot $y(x) = x^2$ ja $y(x) = x^3$ toteuttavat saman differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

a) Sijoita annetut ratkaisut differentiaaliyhtälöön (1) ja määritä sitten kertoimet α ja β.

Aloitetaan sijoittamalla $y(x) = x^2$:

$$y'(x) = 2x$$

$$y''(x) = 2$$

Sijoitetaan nämä differentiaaliyhtälöön:

$$x^2(2) + \alpha x(2x) + \beta(x^2) = 0$$

$$2x^2 + 2\alpha x^2 + \beta x^2 = 0$$

Tämän on oltava totta kaikilla x, joten kertoimien on täytettävä:

$$2 + 2\alpha + \beta = 0$$

Nyt sijoitetaan $y(x) = x^3$:

$$y'(x) = 3x^2$$

$$y''(x) = 6x$$

Sijoitetaan nämä differentiaaliyhtälöön:

$$x^2(6x) + \alpha x(3x^2) + \beta(x^3) = 0$$

$$6x^3 + 3\alpha x^3 + \beta x^3 = 0$$

Tämän on oltava totta kaikilla x, joten kertoimien on täytettävä:

$$6 + 3\alpha + \beta = 0$$

Nyt meillä on kaksi yhtälöä kahdelle tuntemattomalle:

$$\begin{cases} 2 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 6 + 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöparin saamme:

$$\alpha = -4, \quad \beta = 6$$

b) Kiinnitetään vakioille α ja β kohdassa a) saadut lukuarvot. Muodosta differentiaaliyhtälölle (1) sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(1) = 2$ ja $y'(1) = 0$.

Differentiaaliyhtälö on nyt:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

Koska $y(x) = x^2$ ja $y(x) = x^3$ ovat jo ratkaisuja, etsimme kolmannen ratkaisun muodossa $y(x) = Cx^2$, missä C on vakio.

$$y'(x) = 2Cx$$

$$y''(x) = 2C$$

Sijoitetaan nämä differentiaaliyhtälöön:

$$x^2(2C) - 4x(2Cx) + 6(Cx^2) = 0$$

$$2Cx^2 - 8Cx^2 + 6Cx^2 = 0$$

Tämä on totta kaikilla x, joten $y(x) = Cx^2$ on ratkaisu. Käytämme alkuehtoja $y(1) = 2$ ja $y'(1) = 0$:

$$2 = C(1)^2 \Rightarrow C = 2$$

$$0 = 2C(1) \Rightarrow C = 0$$

Koska C ei voi olla sekä 2 että 0, ratkaisu on lineaarikombinaatio aiemmista ratkaisuista:

$$y(x) = Ax^2 + Bx^3$$

Käytämme alkuehtoja:

$$2 = A(1)^2 + B(1)^3 \Rightarrow A + B = 2$$

$$0 = 2A(1) + 3B(1)^2 \Rightarrow 2A + 3B = 0$$

Ratkaisemalla yhtälöparin saamme:

$$A = 3, \quad B = -1$$

Joten ratkaisu on:

$$y(x) = 3x^2 - x^3$$