MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 mallivastaukset

Date of exam: 19.10.2022 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.
2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.
3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

Selvitä suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)}$.

Problem 1 solution

Selvitä suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

Käytetään vertailuperiaatetta. Huomataan, että

$$\frac{n}{2n+1} \geq \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}$ on hajaantuva sarja, myös alkuperäinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ hajaantuu.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Tässä tapauksessa voimme käyttää suhdeperusteista testiä. Määritellään $a_n = \frac{n}{3^n}$ ja lasketaan suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n}$$

Kun $n \to \infty$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

Koska suhde on pienempi kuin 1, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ suppenee.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)}$

Huomataan, että $\sin(\pi n^3)$ vaihtelee välillä $[-1, 1]$, joten voimme arvioida sarjan termiä seuraavasti:

$$\frac{\sqrt{n}}{2n^3 + \sqrt{n}\sin(\pi n^3)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n^3 - \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n^3 - n^{3/2}} = \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}(2 - \frac{1}{\sqrt{n}})}$$

Nyt voimme käyttää vertailuperiaatetta ja verrata tätä sarjaa sarjaan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, joka on p-arvosarja, missä $p = \frac{3}{2} > 1$. Koska p-arvosarja suppenee, myös alkuperäinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)}$ suppenee.

Problem 2

(a) Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

(b) Olkoon $K \in \mathbb{R}$ vakio. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Kn + \pi\sqrt{n}}{e^{K^2} - n\sqrt{K}}$$

Problem 2 solution

(a) Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

Tarkastellaan ensin nimittäjää:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Nyt voimme jakaa sekä osoittajan että nimittäjän tekijöihin:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

Kun $x \neq 1$, voimme supistaa lausekkeen:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1} = \frac{x - 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

Nyt voimme laskea raja-arvon:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 2}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{1 - 2}{(1 + 1)(1^2 + 1)} = \frac{-1}{(2)(2)} = -\frac{1}{4}$$

(b) Olkoon $K \in \mathbb{R}$ vakio. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Kn + \pi\sqrt{n}}{e^{K^2} - n\sqrt{K}}$$

Käytetään raja-arvojen laskusääntöjä ja jaetaan sekä osoittaja että nimittäjä n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Kn + \pi\sqrt{n}}{e^{K^2} - n\sqrt{K}} = \lim_{n\to\infty} \frac{K + \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{e^{K^2}}{n} - \sqrt{K}}$$

Kun $n \to \infty$, saamme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K + \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{e^{K^2}}{n} - \sqrt{K}} = \frac{K}{-\sqrt{K}} = -\sqrt{K}$$

Joten raja-arvo on $-\sqrt{K}$.

Problem 3

Määritä funktion $f(x) = x^2 \sin(3x)$ Taylorin polynomi $P_5(x)$ käyttäen kehityskeskipisteenä $x_0 = 0$.(6p)

Problem 3 solution

Määritetään funktion $f(x) = x^2 \sin(3x)$ Taylorin polynomi $P_5(x)$ kehityskeskipisteessä $x_0 = 0$. Taylorin polynomi on muotoa

$$P_5(x) = f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5$$

Lasketaan funktion $f(x)$ derivaatat:

$$f(x) = x^2 \sin(3x)$$

$$f'(x) = 2x\sin(3x) + x^2(3\cos(3x))$$

$$f''(x) = 2\sin(3x) + 4x\cos(3x) + 6x\cos(3x) - 9x^2\sin(3x)$$

$$f'''(x) = 6\cos(3x) - 12x\sin(3x) + 18\cos(3x) - 27x^2\cos(3x) - 9x\sin(3x)$$

$$f^{(4)}(x) = -24\sin(3x) - 36x\cos(3x) - 54\sin(3x) + 81x^2\sin(3x) - 27\cos(3x)$$

$$f^{(5)}(x) = -72\cos(3x) + 108x\sin(3x) + 162\cos(3x) - 243x^2\cos(3x) + 81\sin(3x)$$

Arvot $x = 0$:

$$f(0) = 0^2\sin(3\cdot 0) = 0$$

$$f'(0) = 2\cdot 0\sin(3\cdot 0) + 0^2(3\cos(3\cdot 0)) = 0$$

$$f''(0) = 2\sin(3\cdot 0) + 4\cdot 0\cos(3\cdot 0) + 6\cdot 0\cos(3\cdot 0) - 9\cdot 0^2\sin(3\cdot 0) = 0$$

$$f'''(0) = 6\cos(3{\cdot}0) - 12{\cdot}0\sin(3{\cdot}0) + 18\cos(3{\cdot}0) - 27{\cdot}0^2\cos(3{\cdot}0) - 9{\cdot}0\sin(3{\cdot}0) = 24$$

$$f^{(4)}(0) = -24\sin(3{\cdot}0) - 36{\cdot}0\cos(3{\cdot}0) - 54\sin(3{\cdot}0) + 81{\cdot}0^2\sin(3{\cdot}0) - 27\cos(3{\cdot}0) = -27$$

$$f^{(5)}(0) = -72\cos(3{\cdot}0) + 108{\cdot}0\sin(3{\cdot}0) + 162\cos(3{\cdot}0) - 243{\cdot}0^2\cos(3{\cdot}0) + 81\sin(3{\cdot}0) = 90$$

Nyt voimme kirjoittaa Taylorin polynomin:

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$P_5(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 + \frac{-27}{4!}x^4 + \frac{90}{5!}x^5$$

$$P_5(x) = 4x^3 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^5$$

Nyt Taylorin polynomi $P_5(x)$ on määritelty:

$$P_5(x) = 4x^3 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^5$$

Problem 4
Laske integraalit

$$\int_0^2 20(x-2)^4 dx, \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx \text{ ja } \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

Vihje: Toiseen integraaliin voi sijoittaa $x = u^2$.

Problem 4 solution

(a) $\int_0^2 20(x-2)^4 dx$

Käytetään potenssifunktion integrointikaavaa $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int_0^2 20(x-2)^4 dx = 20 \int_0^2 (x-2)^4 dx = 20 \left[\frac{(x-2)^5}{5} \right]_0^2$$

$$= 20 \left[\frac{(2-2)^5}{5} - \frac{(0-2)^5}{5} \right] = 20 \left[0 - \frac{(-2)^5}{5} \right] = 20 \left[\frac{32}{5} \right] = \frac{640}{5}$$

(b) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$

Käytetään vihjettä ja tehdään sijoitus $x = u^2$, jolloin $dx = 2udu$:

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx = \int_0^{\pi} \sin(u)(2u) du$$

Integroidaan osittain, jolloin $f(x) = u$ ja $g(x) = -\cos(u)$:

$$f(x) = u \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g(x) = -\cos(u) \Rightarrow g'(x) = \sin(u)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(u)(2u) du = [-2u\cos(u)]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} -\cos(u) du$$

$$= [-2\pi\cos(\pi) - 0\cos(0)] + 2[\sin(u)]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi + 2(\sin(\pi) - \sin(0)) = 2\pi$$

(c) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

Käytetään eksponenttifunktion integrointikaavaa $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} e^{-x} + e^0 = -0 + 1 = 1$$

Problem 5

Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Etsi differentiaaliyhtälön

$$xy' + ny = 1, \quad x > 0,$$

se ratkaisu $y = y(x)$, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.
Problem 5 solution

Tämä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Voimme ratkaista sen käyttämällä integroivaa tekijää. Integroiva tekijä on

$$\mu(x) = e^{\int \frac{n}{x} dx} = e^{n \ln x} = x^n$$

Kerromme differentiaaliyhtälön normaalimuodon molemmat puolet integroivalla tekijällä:

$$x^n(y' + \frac{n}{x}y) = x^{n-1}$$

$$x^n y' + nx^{n-1}y = x^{n-1}$$

Nyt vasen puoli on derivaatan tulo:

$$\frac{d}{dx}(x^n y) = x^{n-1}$$

Integroimalla molemmat puolet saadaan:

$$\int \frac{d}{dx}(x^n y)dx = \int x^{n-1}dx$$

$$x^n y = \frac{x^n}{n} + C$$

Ratkaistaan $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{C}{x^n}$$

Käytetään alkuehtoa $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{C}{1^n}$$

Ratkaistaan vakio C:

$$C = 1 - \frac{1}{n}$$

Nyt saamme ratkaisun differentiaaliyhtälölle:

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{x^n}$$

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{nx^n}$$

Tämä on differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.

Problem 6

Määritä differentiaaliyhtälölle $y'' + 6y' + 5y = 0$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 4, y'(0) = 8$.

Problem 6 solution

6. Määritä differentiaaliyhtälölle $y'' + 6y' + 5y = 0$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 4, y'(0) = 8$.(6p)

Tämä on toisen kertaluvun homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö. Ratkaistaan sen karakteristinen yhtälö:

$$r^2 + 6r + 5 = 0$$

Tämä on toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisukaava on:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tässä tapauksessa $a = 1$, $b = 6$, ja $c = 5$. Sijoitetaan arvot kaavaan:

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$r = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

Saamme kaksi ratkaisua: $r_1 = -1$ ja $r_2 = -5$. Koska saimme kaksi erillistä ratkaisua, differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$

Käytetään alkuehtoja $y(0) = 4$ ja $y'(0) = 8$.

Kun $x = 0$, saadaan:

$$4 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$4 = C_1 + C_2$$

Derivoimme yleisen ratkaisun:

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 5C_2 e^{-5x}$$

Kun $x = 0$, saadaan:

$$8 = -C_1 e^0 - 5C_2 e^0$$

$$8 = -C_1 - 5C_2$$

Nyt meillä on kaksi yhtälöä kahdelle tuntemattomalle:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -C_1 - 5C_2 = 8 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari:

$$C_1 = 4 - C_2$$

$$-(4 - C_2) - 5C_2 = 8$$

$$-4 + C_2 - 5C_2 = 8$$

$$-4C_2 = 12$$

$$C_2 = -3$$

$$C_1 = 4 - (-3) = 7$$

Nyt saamme differentiaaliyhtälön ratkaisun, joka toteuttaa alkuehdot:

$$y(x) = 7e^{-x} - 3e^{-5x}$$