MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 mallivastaukset

Date of exam: 8.12.2022 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.

2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.

3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

Selvitä suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)}$.

Problem 1 solution

Selvitä suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

Käytetään vertailuperiaatetta. Huomataan, että

$$\frac{n}{2n+1} \geq \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}$ on hajaantuva sarja, myös alkuperäinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ hajaantuu.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Tässä tapauksessa voimme käyttää suhdeperusteista testiä. Määritellään $a_n = \frac{n}{3^n}$ ja lasketaan suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n}$$

Kun $n \to \infty$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

Koska suhde on pienempi kuin 1, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ suppenee.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)}$

Huomataan, että $\sin(\pi n^3)$ vaihtelee välillä $[-1, 1]$, joten voimme arvioida sarjan termiä seuraavasti:

$$\frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n^3-\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n^3-n^{3/2}} = \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}(2-\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

Nyt voimme käyttää vertailuperiaatetta ja verrata tätä sarjaa sarjaan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, joka on p-arvosarja, missä $p = \frac{3}{2} > 1$. Koska p-arvosarja suppenee, myös alkuperäinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3+\sqrt{n}\sin(\pi n^3)}$ suppenee.

Problem 2

(a) Määritä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ derivaatta $f'(x)$ kun $x \neq 0$.

(b) Laske toispuolinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 0+} f'(x)$$

jossa f' on laskettu tehtävän ensimmäisessä osassa.

(c) Onko funktio f derivoituva pisteessä $x = 0$?

Problem 2 solution

(a) Määritä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ derivaatta $f'(x)$ kun $x \neq 0$.

Koska $x \neq 0$, voimme tarkastella kahta eri tapausta: $x > 0$ ja $x < 0$.

Kun $x > 0$, saamme:

$$f(x) = \cos(\sqrt{x})$$

Derivoimalla saadaan:

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Kun $x < 0$, saamme:

$$f(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

Derivoimalla saadaan:

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{-x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}$$

Yhdistämällä nämä kaksi tapausta saamme derivaatan $f'(x)$ kun $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, & \text{if } x > 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(b) Laske toispuolinen raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} f'(x)$$

jossa f' on laskettu tehtävän ensimmäisessä osassa.

Kun $x \to 0+$, käytämme derivaatan määritelmää $x > 0$:

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

Käytetään raja-arvojen laskusääntöjä:

$$\lim_{x\to 0+} -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

Tehdään sijoitus $u = \sqrt{x}$, jolloin $x = u^2$ ja $x \to 0+$ vastaa $u \to 0+$:

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\lim_{u\to 0+} \frac{\sin(u)}{u}$$

Tiedämme, että $\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, joten saamme:

$$-\frac{1}{2}\lim_{u\to 0+} \frac{\sin(u)}{u} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

(c) Onko funktio f derivoituva pisteessä $x = 0$?

Funktion f derivaatta $f'(x)$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Jotta funktio olisi derivoituva pisteessä $x = 0$, raja-arvojen $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ ja $\lim_{x\to 0-} f'(x)$ tulisi olla yhtä suuret.

Olemme jo laskeneet, että $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\frac{1}{2}$. Lasketaan nyt raja-arvo $\lim_{x\to 0-} f'(x)$:

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}$$

Tehdään sijoitus $v = \sqrt{-x}$, jolloin $-x = v^2$ ja $x \to 0-$ vastaa $v \to 0+$:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} = \lim_{v\to 0+} \frac{\sin(v)}{2v}$$

Koska tiedämme, että $\lim_{v \to 0} \frac{\sin(v)}{v} = 1$, saamme:

$$\lim_{v \to 0+} \frac{\sin(v)}{2v} = \frac{1}{2}$$

Nyt meillä on molemmat raja-arvot:

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = \frac{1}{2}$$

Koska $\lim_{x \to 0+} f'(x) \neq \lim_{x \to 0-} f'(x)$, funktio f ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Problem 3

Määritä funktion $f(x) = e^{x-1}\sin(2x)$ Taylorin polynomi $P_3(x)$ käyttäen kehityskeskipisteenä $x_0 = 0$.

Problem 3 solution

Funktion $f(x) = e^{x-1}\sin(2x)$ derivaatat ovat:

$$f(x) = e^{x-1}\sin(2x)$$

$$f'(x) = e^{x-1}\cos(2x)\cdot 2 + e^{x-1}\sin(2x)$$

$$f''(x) = 2e^{x-1}\cos(2x) - 4e^{x-1}\sin(2x) + 2e^{x-1}\cos(2x)$$

$$f'''(x) = 2e^{x-1}\cos(2x) - 11e^{x-1}\sin(2x)$$

Arvot $x = 0$:

$$f(0) = e^{-1}\sin(0) = 0$$

$$f'(0) = e^{-1}\cos(0)\cdot 2 + e^{-1}\sin(0) = 2e^{-1}$$

$$f''(0) = 2e^{-1}\cos(0) - 4e^{-1}\sin(0) + 2e^{-1}\cos(0) = 4e^{-1}$$

$$f'''(0) = 2e^{-1}\cos(0) - 11e^{-1}\sin(0) = 2e^{-1}$$

Nyt voimme kirjoittaa Taylorin polynomin $P_3(x)$:

$$P_3(x) = 0 + 2e^{-1}x + \frac{4e^{-1}}{2!}x^2 + \frac{2e^{-1}}{3!}x^3$$

$$P_3(x) = 2e^{-1}x + 2e^{-1}x^2 + \frac{1}{3}e^{-1}x^3$$

Taylorin polynomi $P_3(x)$ on:

$$P_3(x) = 2e^{-1}x + 2e^{-1}x^2 + \frac{1}{3}e^{-1}x^3$$

Problem 4
Laske integraalit

$$\int_0^2 20(x-2)^4 dx, \int_0^{\pi^2/2} \sin(\sqrt{x})dx \text{ ja } \int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

Vihje: Toiseen integraaliin voi sijoittaa $x = u^2$.

Problem 4 solution

(a) $\int_0^2 20(x-2)^4 dx$

Käytetään potenssifunktion integrointikaavaa $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int_0^2 20(x-2)^4 dx = 20\int_0^2 (x-2)^4 dx = 20\left[\frac{(x-2)^5}{5}\right]_0^2$$

$$= 20\left[\frac{(2-2)^5}{5} - \frac{(0-2)^5}{5}\right] = 20\left[0 - \frac{(-2)^5}{5}\right] = 20\left[\frac{32}{5}\right] = \frac{640}{5}$$

(b) $\int_0^{\pi^2/9} \sin(\sqrt{x})dx$

Käytetään vihjettä ja tehdään sijoitus $x = u^2$, jolloin $dx = 2udu$:

$$\int_0^{\pi^2/9} \sin(\sqrt{x})dx = \int_0^{\pi/3} \sin(u)(2u)du$$

Integroidaan osittain, jolloin $f(x) = u$ ja $g(x) = -\cos(u)$:

$$f(x) = u \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g(x) = -\cos(u) \Rightarrow g'(x) = \sin(u)$$

$$\int_0^{\pi/3} \sin(u)(2u)du = [-2u\cos(u)]_0^{\pi/3} - 2\int_0^{\pi/3} -\cos(u)du$$

$$= \left[-2\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}) - 0\cos(0)\right] + 2\,[\sin(u)]_0^{\pi/3}$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

Joten integraalin arvo on $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.
(c) $\int_0^\infty xe^{-x}dx$

Käytetään osittaisintegrointia integraalin laskemiseen. Valitaan $u = x$ ja $dv = e^{-x}dx$:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

Osittaisintegroinnin kaavan mukaan:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}dx$$

Lasketaan ensimmäinen termi:

$$\lim_{x\to\infty} -xe^{-x} - (-0 \cdot e^0) = 0$$

Lasketaan toinen termi:

$$\int_0^\infty -e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} e^{-x} - (-e^0) = 1$$

Yhdistämällä termit saadaan:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = 0 + 1 = 1$$

Integraalin arvo on 1.

Problem 5

Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Etsi differentiaaliyhtälön

$$xy' + ny = 1, \quad x > 0,$$

se ratkaisu $y = y(x)$, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.
Problem 5 solution

Tämä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Voimme ratkaista sen käyttämällä integroivaa tekijää. Integroiva tekijä on

$$\mu(x) = e^{\int \frac{n}{x} dx} = e^{n \ln x} = x^n$$

Kerromme differentiaaliyhtälön normaalimuodon molemmat puolet integroivalla tekijällä:

$$x^n(y' + \frac{n}{x}y) = x^{n-1}$$

$$x^n y' + nx^{n-1}y = x^{n-1}$$

Nyt vasen puoli on derivaatan tulo:

$$\frac{d}{dx}(x^n y) = x^{n-1}$$

Integroimalla molemmat puolet saadaan:

$$\int \frac{d}{dx}(x^n y) dx = \int x^{n-1} dx$$

$$x^n y = \frac{x^n}{n} + C$$

Ratkaistaan $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{C}{x^n}$$

Käytetään alkuehtoa $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{C}{1^n}$$

Ratkaistaan vakio C:

$$C = 1 - \frac{1}{n}$$

Nyt saamme ratkaisun differentiaaliyhtälölle:

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{x^n}$$

$$y(x) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{nx^n}$$

Tämä on differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 1$.

Problem 6

Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 4y = x^2$ yleinen ratkaisu $y = y(x)$. (6p) Vihje: Kokeile sopivaa polynomia löytääksesi epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun.

Problem 6 solution

Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 4y = x^2$ yleinen ratkaisu $y = y(x)$.

Differentiaaliyhtälö on epähomogeeninen toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Ratkaisemme ensin homogeenisen yhtälön $y'' + 4y = 0$.

Homogeenisen yhtälön karakteristinen yhtälö on:

$$r^2 + 4 = 0$$

Ratkaisemalla saamme:

$$r = \pm 2i$$

Koska juuret ovat kompleksilukuja, homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa:

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

Seuraavaksi etsimme epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun. Vihjeen mukaan kokeilemme sopivaa polynomia. Koska oikea puoli on toisen asteen polynomi x^2, kokeilemme yksittäisratkaisuksi toisen asteen polynomia:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Derivoimalla saamme:

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

Sijoitetaan nämä epähomogeeniseen differentiaaliyhtälöön:

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Tämä antaa meille seuraavat yhtälöt:

$$4A = 1$$

$$4B = 0$$

$$2A + 4C = 0$$

Ratkaisemalla saamme:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{8}$$

Joten yksittäisratkaisu on:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

Lopuksi yhdistämme homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun ja epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

Differentiaaliyhtälön $y'' + 4y = x^2$ yleinen ratkaisu on:

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$