



## MS-A0108 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 mallivastaukset

**Date of exam:** 21.4.2023

**Solved by:** mathwiz.ai

**Disclaimer:**

These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.
2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.
3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: [mathwizcontact@gmail.com](mailto:mathwizcontact@gmail.com).

**Problem 1**

Selitä lyhyesti (ilman perusteluja) seuraavat sarjoihin liittyvät käsitteet:

- a) Geometrinen sarja, sen suppeneminen ja summa;
- b) Yli-, ali- ja harmoninen sarja sekä niiden suppeneminen;
- c) Sarjoihin liittyvä suhdetesti ja mitä sen avulla voidaan päätellä.

**Problem 1 solution**

a) Geometrinen sarja on sarja, jossa jokainen termi on edellisen termin kertoma vakio. Geometrisen sarjan yleinen muoto on:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

missä  $a$  on ensimmäinen termi,  $r$  on yhteinen suhde ja  $n$  on termien indeksi. Geometrisen sarja suppenee, kun  $|r| < 1$ , ja sen summa voidaan laskea kaavalla:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

b) Ylisarja on sarja, jossa jokainen termi on suurempi kuin tai yhtä suuri kuin seuraava termi. Alisarja on sarja, jossa jokainen termi on pienempi kuin tai yhtä suuri kuin seuraava termi. Harmoninen sarja on sarja, jonka termit ovat muotoa  $\frac{1}{n}$ , eli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Harmoninen sarja on ylisarja, mutta se ei suppene, vaan kasvaa hitaasti kohti äärettömyyttä.

c) Suhdetesti on menetelmä sarjan suppenemisen tutkimiseksi. Se perustuu sarjan termien suhteiden raja-arvoon. Olkoon  $a_n$  sarjan termit, suhdetesti määritellään seuraavasti:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Suhdetestin avulla voidaan päätellä seuraavaa:

- Jos  $L < 1$ , sarja suppenee. - Jos  $L > 1$ , sarja hajaantuu. - Jos  $L = 1$ , suhdetesti ei anna tietoa sarjan suppenemisestä tai hajaantumisesta.

**Problem 2**

a) Olkoon  $c > 0$  vakio. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn + 2\sqrt{n}}{c^2 - n\sqrt{c}}.$$

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

**Problem 2 solution**

a) Olkoon  $c > 0$  vakio. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn + 2\sqrt{n}}{c^2 - n\sqrt{c}}.$$

Käytetään raja-arvojen laskusääntöjä ja jaetaan molemmat puolet  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + \frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{c^2}{n} - \sqrt{c}}$$

Kun  $n \rightarrow \infty$ , termi  $\frac{c^2}{n}$  häviää:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + \frac{2}{\sqrt{n}}}{-\sqrt{c}}$$

Nyt voimme ratkaista raja-arvon:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{-\sqrt{c}} = -\sqrt{c}$$

Joten raja-arvo on  $-\sqrt{c}$ .

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}$$

Huomaamme, että sekä ylä- että alaosa on tekijä  $(x - 1)$ . Käytetään tekijöihin jakamista:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{((x^2 + 1)(x - 1))(x + 1)}$$

Kun  $x \neq 1$ , voimme supistaa tekijät  $(x - 1)$ :

$$\frac{x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)}$$

Nyt voimme laskea raja-arvon, kun  $x \rightarrow 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{1 - 2}{(1^2 + 1)(1 + 1)} = \frac{-1}{(2)(2)} = -\frac{1}{4}$$

Joten raja-arvo on  $-\frac{1}{4}$ .

**Problem 3**

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}.$$

a) Miten  $f(0)$  pitää määritellä, jotta funktiosta  $f$  tulee jatkuva kohdassa  $x = 0$  ?

Vinkki: L'Hospitalin sääntö.

b) Millainen polynomiapproksimaatio funktiolle  $f$  saadaan, jos  $g(x) = \ln(1+3x)$  korvataan

funktion  $g$  Maclaurin-polynomilla  $P_4(x)$  ?

Lisätieto: Maclaurin = Taylor pisteen  $x_0 = 0$  suhteen.

**Problem 3 solution**

a) Jotta funktiosta  $f$  tulee jatkuva kohdassa  $x = 0$ , meidän on löydettävä raja-arvo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

Koska tämä raja-arvo on muotoa  $\frac{0}{0}$ , voimme käyttää L'Hospitalin sääntöä:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \ln(1+3x)}{\frac{d}{dx} x}$$

Derivoidaan molemmat osat:

$$\frac{d}{dx} \ln(1+3x) = \frac{3}{1+3x}$$

ja

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

Nyt voimme laskea raja-arvon:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{1} = \frac{3}{1+3(0)} = 3$$

Jotta funktio  $f$  olisi jatkuva kohdassa  $x = 0$ , meidän on määriteltävä  $f(0) = 3$ .

b) Haluamme korvata funktion  $g(x) = \ln(1 + 3x)$  Maclaurin-polynomilla  $P_4(x)$ . Maclaurin-polynomi on Taylor-polynomi pisteen  $x_0 = 0$  suhteen. Lasketaan ensin funktion  $g$  derivaatat:

$$\begin{aligned}g(x) &= \ln(1 + 3x) \\g'(x) &= \frac{3}{1 + 3x} \\g''(x) &= -\frac{9}{(1 + 3x)^2} \\g'''(x) &= \frac{54}{(1 + 3x)^3} \\g^{(4)}(x) &= -\frac{486}{(1 + 3x)^4}\end{aligned}$$

Nyt voimme laskea Maclaurin-polynomien  $P_4(x)$ :

$$P_4(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)x^2}{2!} + \frac{g'''(0)x^3}{3!} + \frac{g^{(4)}(0)x^4}{4!}$$

Sijoitetaan derivaattojen arvot:

$$P_4(x) = \ln(1) + \frac{3}{1}x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{54}{6}x^3 - \frac{486}{24}x^4 = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \frac{81}{4}x^4$$

Polynomiapproksimaatio funktiolle  $f(x)$  saadaan korvaamalla  $g(x)$  Maclaurin-polynomilla  $P_4(x)$ :

$$f(x) \approx \frac{P_4(x)}{x} = \frac{3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \frac{81}{4}x^4}{x} = 3 - \frac{9}{2}x + 9x^2 - \frac{81}{4}x^3$$

**Problem 4**

a) Osoita, että funktio  $f : [0, \pi/2[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $f(x) = 2x \tan x$ , on aidosti kasvava. Tästä seuraa, että sillä on käänteisfunktio  $f^{-1}$ , mutta tarkempaa perustelua ei vaadita.

b) Laske  $f(\pi/4)$  ja tätä tietoa käyttämällä  $(f^{-1})'(\pi/2)$ .

**Problem 4 solution**

a) Osoitetaan, että funktio  $f(x) = 2x \tan x$  on aidosti kasvava välillä  $[0, \pi/2[$ . Tätä varten lasketaan funktion derivaatta ja osoitetaan, että se on positiivinen koko välillä.

Funktion  $f(x)$  derivaatta on:

$$f'(x) = 2 \tan x + 2x \sec^2 x$$

missä  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ . Koska  $\tan x$  ja  $\sec^2 x$  ovat positiivisia välillä  $[0, \pi/2[$ , niin myös  $f'(x)$  on positiivinen koko välillä. Tämä tarkoittaa, että funktio  $f(x)$  on aidosti kasvava välillä  $[0, \pi/2[$ .

b) Lasketaan  $f(\pi/4)$ :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \left(\frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Koska  $f^{-1}(f(x)) = x$ , voimme laskea käänteisfunktion derivaatan arvon  $x = \pi/2$  käyttämällä ketjusääntöä:

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

Sijoitetaan  $x = \pi/4$  ja  $f(\pi/4) = \pi/2$ :

$$(f^{-1})'(\pi/2)f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Ratkaistaan  $(f^{-1})'(\pi/2)$ :

$$(f^{-1})'(\pi/2) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Lasketaan  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ :

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \left(\frac{\pi}{4}\right) \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2 \left(\frac{\pi}{4}\right) (2) = 2 + \pi$$

Nyt voimme laskea  $(f^{-1})'(\pi/2)$ :

$$(f^{-1})'(\pi/2) = \frac{1}{2 + \pi}$$

**Problem 5**

a) Laske osittaisintegrointia käyttämällä integraali

$$\int_0^1 x \arctan x dx$$

b) Oletetaan tunnetuksi, että

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Laske sijoitusta  $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$  käyttämällä epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

ottaen huomioon epäoleellisen integraalin määritelmä.

**Problem 5 solution**

a) Laske integraali  $\int_0^1 x \arctan x dx$  käyttämällä osittaisintegrointia. Valitaan  $u = \arctan x$  ja  $dv = x dx$ . Tällöin saadaan  $du = \frac{1}{1+x^2} dx$  ja  $v = \frac{1}{2}x^2$ . Osittaisintegrointikaavan mukaan:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Sijoitetaan arvot:

$$\int_0^1 x \arctan x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Lasketaan ensimmäinen termi:

$$\left[ \frac{1}{2}x^2 \arctan x \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1)^2 \arctan(1) - 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\pi$$

Jatketaan integraalin  $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$  laskemista pilkkomalla se osiin:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

Nyt integraali voidaan laskea helposti:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right]$$

Lasketaan molemmat integraalit erikseen:



$$\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

ja

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Yhdistetään molemmat osat:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Nyt voimme yhdistää molemmat osat alkuperäisestä integraalista:

$$\int_0^1 x \arctan x dx = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

b) Haluamme laskea epäoleellisen integraalin  $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ . Käytetään sijoitusta  $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ , jolloin  $x = \sqrt{2}u$  ja  $dx = \sqrt{2}du$ . Integraalin rajat muuttuvat:  $x = 0$  vastaa  $u = 0$  ja  $x \rightarrow \infty$  vastaa  $u \rightarrow \infty$ . Sijoitetaan nämä arvot integraaliin:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^\infty e^{-u^2} \sqrt{2} du = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

Koska tiedämme, että  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , voimme nyt ratkaista integraalin:

$$\sqrt{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Siis  $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

**Problem 6**

a)

Määritä differentiaaliyhtälölle  $y' = y + 2 \sin x$ , sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon  $y(0) = 1$ .

b)

Määritä differentiaaliyhtälölle  $y'' + 3y' = 4y$ , sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot  $y'(0) = y(0) = 1$

**Problem 6 solution**

a) Oletetaan ensin, että homogeenisen differentiaaliyhtälön  $y' - y = 0$  ratkaisu on muotoa  $y_h(x) = Ce^x$ , missä  $C$  on vakio. Tällöin derivaatta on  $y'_h(x) = Ce^x$ . Sijoitetaan nämä alkuperäiseen homogeeniseen differentiaaliyhtälöön:

$$Ce^x - Ce^x = 0$$

Tämä toteutuu kaikilla  $C$ :n arvoilla, joten homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on:

$$y_h(x) = Ce^x$$

Seuraavaksi etsitään erityisratkaisu alkuperäiselle differentiaaliyhtälölle  $y' - y = 2 \sin x$ . Tätä varten tehdään oletus, että erityisratkaisu on muotoa  $y_p(x) = A \cos x + B \sin x$ , missä  $A$  ja  $B$  ovat vakioita. Lasketaan derivaatta:

$$y'_p(x) = -A \sin x + B \cos x$$

Sijoitetaan  $y_p(x)$  ja  $y'_p(x)$  alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön:

$$(-A \sin x + B \cos x) - (A \cos x + B \sin x) = 2 \sin x$$

Vertaamalla molempien puolien sinin ja kosinin kertoimia saadaan:

$$\begin{cases} -A - B = 2 \\ B - A = 0 \end{cases}$$

Ratkaisemalla järjestelmän saadaan  $A = -1$  ja  $B = -1$ . Joten erityisratkaisu on:

$$y_p(x) = -\cos x - \sin x$$

Yhdistämällä homogeenisen ratkaisun ja erityisratkaisun saadaan yleinen ratkaisu:

$$y(x) = Ce^x - \cos x - \sin x$$

Käytetään alkuehtoa  $y(0) = 1$ :

$$1 = Ce^0 - \cos 0 - \sin 0 \implies 1 = C - 1 \implies C = 2$$

Joten differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon  $y(0) = 1$ , on:

$$y(x) = 2e^x - \cos x - \sin x$$

b)

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö  $y'' + 3y' = 4y$  uudelleen käyttämällä karakteristista yhtälöä.

Muodostetaan karakteristinen yhtälö:

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

Tämä on toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -4$$

Koska saimme kaksi erillistä ratkaisua, differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

Käytetään alkuehtoja  $y(0) = 1$  ja  $y'(0) = 1$ . Ensin alkuehto  $y(0) = 1$ :

$$1 = C_1e^0 + C_2e^{-4 \cdot 0} \implies 1 = C_1 + C_2$$

Lasketaan differentiaaliyhtälön ratkaisun derivaatta:

$$y'(x) = C_1e^x - 4C_2e^{-4x}$$

Käytetään alkuehtoa  $y'(0) = 1$ :

$$1 = C_1 e^0 - 4C_2 e^{-4 \cdot 0} \implies 1 = C_1 - 4C_2$$

Ratkaisemme järjestelmän:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 4C_2 = 1 \end{cases}$$

Saadaan  $C_1 = 1$  ja  $C_2 = 0$ . Sijoitetaan nämä arvot yleiseen ratkaisuun:

$$y(x) = e^x$$

Joten differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot  $y(0) = 1$  ja  $y'(0) = 1$ , on  $y(x) = e^x$ .