MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet mallivastaukset

Date of exam: 24.2.2023 **Solved by**: mathwiz.ai

Disclaimer:
These problems are solved by mathwiz.ai, a service leveraging the latest generative AI technologies. This means the solutions come with inherent limitations:

1. **Understanding:** The AI doesn't understand mathematics like humans do; it predicts answers based on historical data patterns.
2. **Reliability and Context:** The AI's responses can be contextually inappropriate or inconsistent, and thus contain errors.
3. **Creativity:** AI applies known patterns, it does not invent new mathematical methods.

Use these solutions as guides, not definitive answers. Despite occasional errors, the solutions can be useful for providing context around the problems. For verifiable accurate solutions, seek guidance from a qualified educator. At the time of solving these problems, the mathematical capabilities of AIs were at the level of an advanced university mathematics student. If you find errors in the solutions, feel free to inform us. Contact information: mathwizcontact@gmail.com.

Problem 1

a)

Pokerikäsi koostuu viidestä kortista, ilman järjestystä. Laske kaikkien pokerikäsien lukumäärä.
b)

Värisuora (en. straight flush) on pokerikäsi, jossa kaikkien korttien värit on sama, ja niiden arvot ovat peräkkäiset, jossa ässän arvo voi laskea ollakseen joko heti kuningasta isompi tai kakkosta pienempi (muttei molemmat yhtä aikaa). Laske kaikkien värisuorien lukumäärä.
c)

Värikäsi (en. flush) on käsi, jossa kaikkien korttien värit on sama, mutta joka ei ole värisuoraa. Laske kaikkien värikäsien lukumäärä.

Problem 1 solution

a) Pokerikäsi koostuu viidestä kortista, ilman järjestystä. Kaikkien pokerikäsien lukumäärä voidaan laskea käyttämällä yhdistelmien kaavaa:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tässä tapauksessa $n = 52$ (korttien lukumäärä) ja $k = 5$ (korttien lukumäärä pokerikädessä). Lasketaan yhdistelmien lukumäärä:

$$C(52,5) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!47!} = 2{,}598{,}960$$

Joten kaikkien pokerikäsien lukumäärä on 2,598,960.

b) Värisuoran määritelmän mukaan kaikkien korttien värit ovat samat, ja niiden arvot ovat peräkkäiset. On 4 erilaista maata ja 10 erilaista arvojonoa (A2345, 23456, 34567, 45678, 56789, 678910, 78910J, 8910JQ, 910JQK, 10JQKA), joten värisuorien lukumäärä on:

$$4 \cdot 10 = 40$$

c) Värikäsi on käsi, jossa kaikkien korttien värit ovat samat, mutta joka ei ole värisuora. Ensinnäkin lasketaan kaikkien käsien lukumäärä, joissa kaikkien korttien värit ovat samat. Tämä voidaan tehdä valitsemalla 5 korttia 13:sta saman maan kortista:

$$C(13,5) = \binom{13}{5} = \frac{13!}{5!8!} = 1{,}287$$

Koska on 4 erilaista maata, kaikkien saman maan käsien lukumäärä on:

$$4 \cdot 1{,}287 = 5{,}148$$

Nyt meidän on poistettava värisuorat, jotka laskimme osassa b. Joten värikäsien lukumäärä on:

$$5{,}148 - 40 = 5{,}108$$

Joten kaikkien värikäsien lukumäärä on 5,108.

Problem 2

Tiina Teekkari haluaa todistaa, että väiteet A, B, C ja D ovat yhtäpitävät, eli taisin sanoin, että $X \to Y$ aina pätee jos $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. Hän on jo todistanut implikaatiot $A \to B, B \to D, (\neg A) \to (\neg D)$, sekä $B \to C$. Selitä, miksi nämä implikaatiot eivät vielä todista, että kaikki väiteet ovat yhtäpitäviä. Todista myös, että jos Tiina onnistuu muuttaamaan yhtä implikatiota toiseen suuntaan meneväksi implikaatioksi, niin hän on todistanut että kaikki väiteet ovat yhtäpitävät.

Vihje: Piirrä suunnattu verkko, jonka solmut ovat väiteet A, B, C ja D, ja jossa on kaari $X \to Y$ aina jos implikaatio $X \to Y$ on todistettu. Onko relaatio $\to$ transitiivinen?

Problem 2 solution

Tiina Teekkari on todistanut implikaatiot $A \to B$, $B \to D$, $(\neg A) \to (\neg D)$ ja $B \to C$. Piirretään suunnattu verkko, jonka solmut ovat väitteet A, B, C ja D, ja jossa on kaari $X \to Y$ aina, kun implikaatio $X \to Y$ on todistettu:

‘‘‘ A −¿ B −¿ D — v C ‘‘‘

Näiden implikaatioiden perusteella emme voi vielä todistaa, että kaikki väitteet ovat yhtäpitäviä, koska emme voi päätellä kaikkia implikaatioita näistä todistetuista implikaatioista. Esimerkiksi, emme voi päätellä, että $A \to C$ tai $C \to D$.

Relaatio $\to$ on transitiivinen, eli jos $X \to Y$ ja $Y \to Z$, niin $X \to Z$. Jos Tiina onnistuu muuttamaan yhtä implikaatiota toiseen suuntaan meneväksi implikaatioksi, niin hän on todistanut, että kaikki väitteet ovat yhtäpitäviä. Tarkastellaan esimerkiksi implikaatiota $B \to C$. Jos Tiina todistaa implikaation $C \to B$, niin saamme seuraavan verkon:

‘‘‘ A −¿ B ¡−¿ C — v D ‘‘‘

Nyt voimme päätellä kaikki implikaatiot transitiivisuuden avulla:

- $A \to B \to D$
- $A \to B \to C$
- $C \to B \to D$
- $D \to B \to C$

Tämä tarkoittaa, että kaikki väitteet ovat yhtäpitäviä. Samanlainen päättely voidaan tehdä, jos Tiina todistaa jonkin muun implikaation toiseen suuntaan meneväksi implikaatioksi.

Problem 3

Osoita, että kaikille kokonaisluvulle $n \in \mathbb{Z}$ pätee $30 \mid \left(n^5 - n\right)$.

Problem 3 solution

Osoitetaan, että kaikille kokonaisluvuille $n \in \mathbb{Z}$ pätee $30 \mid (n^5 - n)$.

Huomaa, että $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Jotta $30 \mid (n^5 - n)$, meidän on osoitettava, että $2 \mid (n^5 - n)$, $3 \mid (n^5 - n)$ ja $5 \mid (n^5 - n)$.

1. Osoitetaan, että $2 \mid (n^5 - n)$:

Kun n on parillinen, $n = 2k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Silloin

$$n^5 - n = (2k)^5 - 2k = 2^5k^5 - 2k = 2k(32k^4 - 1),$$

joka on jaollinen kahdella.

Kun n on pariton, $n = 2k + 1$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Silloin

$$n^5 - n = (2k + 1)^5 - (2k + 1) = 2(16k^5 + 20k^3 + 5k),$$

joka on myös jaollinen kahdella.

2. Osoitetaan, että $3 \mid (n^5 - n)$:

Käyttämällä pienten potenssien ominaisuuksia modulo 3, saadaan

$$n^5 - n \equiv n^2 - n \pmod 3$$

Koska $n^2 - n = n(n - 1)$, huomaamme, että joko n tai $n - 1$ on jaollinen kolmella. Joten $3 \mid (n^5 - n)$.

3. Osoitetaan, että $5 \mid (n^5 - n)$:

Käyttämällä pienten potenssien ominaisuuksia modulo 5, saadaan

$$n^5 - n \equiv n - n \equiv 0 \pmod 5$$

Joten $5 \mid (n^5 - n)$.

Koska $2 \mid (n^5 - n)$, $3 \mid (n^5 - n)$ ja $5 \mid (n^5 - n)$, niin $30 \mid (n^5 - n)$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \in \mathbb{Z}$.

Problem 4

Laske potenssit. Kirjoita vastaukset muodossa $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, kun lasketaan modulo n.
a) 2^{32} mod 11.
b) 3^{35} mod 17.
c) 9^{100} mod 21.

Problem 4 solution

a) Lasketaan 2^{32} mod 11:

Käytetään pienten potenssien ominaisuutta modulo 11. Koska 11 on alkuluku, voimme käyttää Fermat'n pientä lausetta:

$$2^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$$

Nyt voimme kirjoittaa 2^{32} muodossa $2^{32} = (2^{10})^3 \cdot 2^2$. Sovelletaan Fermat'n pientä lausetta:

$$2^{32} \equiv (2^{10})^3 \cdot 2^2 \equiv 1^3 \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{11}$$

Joten 2^{32} mod $11 = 4$.

b) Lasketaan 3^{35} mod 17:

Käytetään pienten potenssien ominaisuutta modulo 17. Koska 17 on alkuluku, voimme käyttää Fermat'n pientä lausetta:

$$3^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$$

Nyt voimme kirjoittaa 3^{35} muodossa $3^{35} = (3^{16})^2 \cdot 3^3$. Sovelletaan Fermat'n pientä lausetta:

$$3^{35} \equiv (3^{16})^2 \cdot 3^3 \equiv 1^2 \cdot 3^3 \equiv 27 \equiv 10 \pmod{17}$$

Joten 3^{35} mod $17 = 10$.

c) Lasketaan 9^{100} mod 21:

Huomaa, että $9 = 3^2$, joten voimme kirjoittaa $9^{100} = (3^2)^{100} = 3^{200}$.

Käytetään Eulerin totienttifunktiota $\varphi(n)$, joka kertoo, kuinka monta kokonaislukua on pienempi kuin n ja erikseen lueteltuna n:n kanssa. Eulerin totienttifunktion arvo 21:lle on $\varphi(21) = \varphi(3 \cdot 7) = (3-1)(7-1) = 12$.

Eulerin lauseen mukaan, jos a ja n ovat suhteellisesti alkulukuja, niin

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Tässä tapauksessa $a = 3$ ja $n = 21$, joten

$$3^{12} \equiv 1 \pmod{21}$$

Nyt voimme kirjoittaa 3^{200} muodossa $3^{200} = (3^{12})^{16} \cdot 3^8$. Sovelletaan Eulerin lausetta:

$$3^{200} \equiv (3^{12})^{16} \cdot 3^8 \equiv 1^{16} \cdot 3^8 \equiv 3^8 \equiv 6561 \equiv 9 \pmod{21}$$

Joten $9^{100} \bmod 21 = 9$.

Problem 5

Olkoon $M = \{a, b, c, d, e\}$. Muodostetaan verkko $G = (V, E)$, jossa solmujoukko V on joukon M kahden alkioiden osajoukkojen joukko (eli esim. $\{a, d\} \in V$) ja kahden solmujen välillä on kaari jos ja vain jos vastaavien joukkojen leikkaus on tyhjä. Symmetrian takia, kaikilla solmuilla on sama aste.
a) Montako solmua on verkossa G ?
b) Piirrä verkko G.
c) Laske verkon G kromaattinen luku.

Problem 5 solution

a) Verkon G solmujoukko V koostuu joukon M kahden alkioiden osajoukkojen joukosta. Joukon M kahden alkioiden osajoukkoja on $\binom{5}{2}$ kappaletta, missä $\binom{n}{k}$ on yhdistelmien lukumäärä. Lasketaan yhdistelmien lukumäärä:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Joten verkossa G on 10 solmua.

b) Piirretään verkko G. Solmut ovat joukon M kahden alkioiden osajoukkojen joukko:

$$V = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

Kahden solmun välillä on kaari, jos ja vain jos niiden vastaavien joukkojen leikkaus on tyhjä. Tämä tarkoittaa, että kaari on olemassa, jos solmujen joukot eivät sisällä yhteisiä alkioita. Verkko G näyttää tältä:

‘‘‘ a—b / / c—d—e ‘‘‘

c) Lasketaan verkon G kromaattinen luku. Kromaattinen luku on pienin määrä värejä, joilla solmut voidaan värittää niin, että vierekkäiset solmut eivät ole samanvärisiä.

Tarkastellaan verkkoa G. Solmu $\{a, b\}$ on vierekkäinen solmujen $\{c, d\}$, $\{c, e\}$ ja $\{d, e\}$ kanssa. Solmu $\{a, c\}$ on vierekkäinen solmujen $\{b, d\}$, $\{b, e\}$ ja $\{d, e\}$ kanssa. Solmu $\{a, d\}$ on vierekkäinen solmujen $\{b, c\}$, $\{b, e\}$ ja $\{c, e\}$ kanssa. Solmu $\{a, e\}$ on vierekkäinen solmujen $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ ja $\{c, d\}$ kanssa.

Koska jokaisella solmulla on kolme naapuria, tarvitsemme vähintään neljä väriä, jotta vierekkäiset solmut eivät ole samanvärisiä. Esimerkiksi, voimme värittää solmut seuraavasti:

- $\{a, b\}$: väri 1 - $\{a, c\}$: väri 2 - $\{a, d\}$: väri 3 - $\{a, e\}$: väri 4 - $\{b, c\}$: väri 3 - $\{b, d\}$: väri 2 - $\{b, e\}$: väri 1 - $\{c, d\}$: väri 1 - $\{c, e\}$: väri 2 - $\{d, e\}$: väri 3

Tämä värittäminen täyttää vaatimuksen, että vierekkäiset solmut eivät ole samanvärisiä. Joten verkon G kromaattinen luku on 4.